Plan détaillé [245] Fct cplx

I) Séries entière et analyticité :

[SVp dites moi comment réduire cette leçon !]

A) Séries entières :

[TAU] p. 35 - 46

Déf1 : série entière (en 0...?) ← ⚠ Tauvel

THM2 : Lemme d'Abel

THM3 : Thm conduisant à la déf de R rayon de CV

THM4 : Formule d'Hadamard

Rem5 : La CVN à l'intérieur du disque de CV permet d'avoir des résultats venant des Σ de fct

Prop6 : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ continue sur $D(0,R)$

Déf7 : $\boxed{\text{fct holomorphe}}$

THM8 : $\underset{S(z)}{\sum a_n z^n}$ holom sur $D(0,R)$ et $S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ (avec la série a m̃ rayon de CV que $\sum a_n z^n$)

Cor9 : $S(z) = \sum a_n z^n$ infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0,R)$ et $S^{(p)}(z) = \dots$ $S^{(p)}(0) = p!\,a_p$.

Déf10 : fct dév en Σ ent. en z_0

THM11 : f dév en Σ ent au $\mathcal{V}(0)$ ⇒ • f infin. $\mathbb{C}$-dériv au $\mathcal{V}(0)$ • $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ sur $\mathcal{V}(0)$

THM12 : $\boxed{\text{CNS pour } f \text{ dév en } \Sigma \text{ ent} \leftarrow ⚠ \text{ pour fct réelle}}$

Ex11 : $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$; $\cos(z), \sin(z)$ sur $\mathbb{C}$, $\frac{1}{1-z}$ sur $D(0,1)$

Rem13 : pour le cas des fct cplx on introduit la partie B)

Appli11 de ⊛ : Thm de Runge (version faible)] ⚠ ♥ ☺

peut être enlever Thm 12 du coup ?

B) Fonctions analytiques :

[TAU] p. 50 - 54

Déf12 : fct an.

Ex13 : $z \mapsto \frac{1}{z}$ analytique sur $\mathbb{C}^*$: $\forall a \in \mathbb{C}^*, |z-a| < |a| \Rightarrow \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{a^{n+1}}$

Les polynômes sont analytiques sur $\mathbb{C}$

Rem14 : Par prop. sur les Σ ent et comme les notions suivantes sont locales, les fct an sur un ~~ouvert~~ U sont : infinimt $\mathbb{C}$-dérivable sur U, ~~de~~ ⤳ une fct an. sur U est holomorphe sur U.

THM15 : Série ent analyt sur $D(0,R)$ ← pas évident !

THM16 : prolongemt analytique + en particulier $f = g$ sur $\mathcal{V}(a) \Rightarrow f = g$ sur U

THM17 : principe des zéros isolés] (ou) ~~version~~ [A.M] (ou) [QUÉ] p. 102 [A.M]

Appli18 : • Il n'existe pas de fct analytique sur $D(0,1)$ tq : $\forall n \geq 2$ $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{\ln(n)}$

Rem19 : ⚠ pt d'accumulation dans Thm17 doit être dans U, ~~avec~~ ex de [BEC] en précisant qu'on verra + tard pq $z \mapsto \sin(\frac{\pi}{z})$ analytique

[BEC]

II) Fonctions holomorphes :

A) 1ère prop et conditions de C-R : $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert

[QUÉ] p. 76

THM20 : • $f, g \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow f + \lambda g,\ f \cdot g \in \mathcal{H}(\Omega)$ ← algèbre ($\lambda \in \mathbb{C}$)
• $(f+\lambda g)' = \dots$, $(fg)'$, $(f/g)'$
+ composition.

Ex21 : polyn ; fract. rationnelles

ou [A.M.] m̃ si c'est pas formulé en prop.

[TAU] p. 59

Rem22 : identification $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto x+iy \end{array}$ $f(x+iy) = \tilde{f}(x,y)$; on notera $\tilde{f} : f$ on confondra $\mathbb{R}^2, \mathbb{C}$

~~THM33 : f déf au voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$. LASSE (i) f $\mathbb{C}$-dériv. en z_0 ; (ii) f diff en (x_0,y_0) et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ • Si ces condit$^\circ$ sont vérifiées, $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$~~

[BEC] (ou [TAU] si on oublie)

THM33 : Condit$^\circ$ de Cauchy-Riemann ← avec $df(z_0)$ similitude directe

rajouter rem genre forme du Jacobien ⤳ similitude de rapport $|f'(z_0)|$

Contre-ex34 : • la différentiabilité de f est ⚠ ⤳ $f(z) = \sqrt{|xy|}$ non holomorphe en $\mathbb{C}$ mais ses parties réelles/cplx vérifient (v) en 0

Ex35 : $z \mapsto \bar{z}$ non holomorphe sur $\mathbb{C}$

Csq36 : Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $f' = 0$ sur Ω, f cste

[TAU] p. 61

B) Construction du logarithme cplx : $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$

[TAU] p. 62 - 64

Déf37 : déterminat$^\circ$ continue de l'arg.

Prop38 : 2 dét sont = à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$, sur Ω

Déf39 : déterminat$^\circ$ principale de l'arg sur $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (+ expression ?)

Déf40 : $\log(z)$

Prop41 : les dét. continues du log sont $z \mapsto \ln|z| + i\Theta(z)$ + dét. principale du log, noté Log, sur Ω_0.

THM42 : Ω connexe, si f dét cont. du log sur Ω est une $\mathbb{C}$-primitive de $z \mapsto 1/z$

Prop43 : $\forall |z| < 1$, $\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$

C) Intégrale curviligne :

[QUÉ] p. 83 - 85

Déf44 : chemin $\gamma : [a;b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; $\gamma^* = \gamma([a,b])$ = image de γ. $\gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow \gamma$ "fermé"
• Si γ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on l'appelle ~~"Bs"~~ ~~"lacet"~~ courbe

Déf45 : 2 courbes équivalentes

Ex46 : $\gamma_1 : \begin{array}{l} [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{array}$; $\gamma_2 : t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}$ / pour représenter un segment $[u;v] \subseteq \mathbb{C}$: $\gamma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)u + tv$.

Rem47 : concaténation de 2 chemins ...

Déf48 : $\int_\gamma f(z)\,dz$ + chasles | Rem50 : Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$
Ex51 : $\gamma : t \in [0; 2\pi] \mapsto e^{2i\pi k t}$ ← parcourt $\mathcal{C}(0,1)$ k fois, $\gamma_k^* = \mathcal{C}(0,1)$, $\forall k$ et $\int_{\gamma_k} \frac{1}{z} dz = 2i\pi k$.

Plan détaillé [245] Suite

II) C)

THM-Déf 52 : Indice pour $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ lacet (indice déf sur $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$) à valeurs dans $\mathbb{Z}$, cste sur chaque comp connexe de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ (nulle sur la comp. connexe nonbornée) [TAU] p. 71 – 72

Prop 53 : γ représente le cercle $\mathcal{C}(a,r)$ orienté dans le sens direct, parcouru 1 fois

$\Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z-a|>r \\ 1 & \text{si } |z-a|<r \end{cases}$

Rem 54 : $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ compte le nbre de tours de $\gamma(t)$ autour de z.

III) Résultats importants sur les fonctions holomorphes :

A) Formule de Cauchy : ← j'ai pas trouvé de réf qui travaille sur les étoilés...

Prop 55 : $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$ continue. LASSE [TAU] p. 72 – 77

(i) f possède une $\mathbb{C}$-primitive sur U. (ii) $\forall \gamma$ ~~chemin~~ lacet dans U, $\int_\gamma f(z)dz = 0$

Ex 56 : Si $n \geq 0$ et γ lacet quelconque, ou $n<-1$ et $0 \notin \gamma^*$; on a $\int_\gamma z^n dz = 0$

THM 57 : Goursat

THM 58 : Cauchy sur un CVX

Cor 59 : Formule de Cauchy sur un CVX   [mettre rem Cauchy valable sur ouvert étoilé ?]

Dév 1

Appli 60 : Lemme [1] : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ (ou calcule T.F gaussienne) [El Am F] + [GOU]

THM [2] : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, sa fct K R est $\varphi_X : t \mapsto e^{-t^2/2}$

Cor [3] : $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, ——— $\varphi_X : t \mapsto e^{imt}e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$.

Rem 61 : Le thm de Cauchy peut permettre d'intégrer des fractions rationnelles en cost/sint ; exemple : $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}\, dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ (peut-être rajouter Morera ici ?) [QUE] p. 163

B) Analyticité des fonctions holomorphes, conséquences :

THM 62 : $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. [TAU] p. 77 – 78

f analytique sur Ω et le rayon de CV ~~de la~~ du dév en Σ de f en a est $\geq d(a, \partial\Omega)$

Si Ω convexe, γ lacet dans Ω, $a \notin \gamma^*$, $f^{(n)}(a)\,\mathrm{ind}_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt$

Cor 63 : Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f est infiniment $\mathbb{C}$-dériv. sur Ω

Rem 64 : Les grands résultats des fct analytiques (zéros isolés, prolongement) peuvent s'appliquer + facilement car il est + facile de vérifier qu'une fct est holom. plutôt qu'analytique.

THM 65 (Inégalité de Cauchy) : $R>0$, $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$, $f(z) = \sum a_n z^n$ sur $D(0,R)$ [TAU] p. 84 – 85

$|a_n| = \frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)| \leq \frac{\sup\{|f(z)| \mid |z|=r\}}{r^n}$

THM 66 : Liouville

Appli 67 : Thm de D'Alembert-Gauss

THM 68 : Principe du max (local) : $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ [BEC] p. 72 (pas de preuve :( ) [TAU]

Si $|f|$ admet un max local en $a \in \Omega$, alors f cste au $\mathcal{V}(a)$

Cor 69 : $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert connexe borné, f continue sur $\bar{\Omega}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

- f atteint son maximum sur $\partial\Omega$
- S'il existe $z_0 \in \Omega$ tq $f(z_0) = \max_{\bar{\Omega}} f$, alors f cste sur $\bar{\Omega}$.

Rem 70 : Ce principe peut être utilisé pour prouver le lemme de Schwarz (et trouver la forme de tous les automorphismes de $D(0,1)$ cf [TAU]) ← bien à connaître mais je le mettrai pas dans la leçon...

si j'y pense → Rem 71 : Dans Thm Runge, si on enlève l'hyp $\hat{K}^c$ connexe, le résultat est faux.

C) Intégrales de fonctions holomorphes :

- Morera] [QUE] p 99
- Thm d'holom sous le $\int$ ← preuve Nabile : 1) Morera sur F via Fubini et Cauchy sur ∂ ; 2) Cauchy' sur F → Fub → Cauchy sur ∂ (pas de preuve :( )
- Appli autre façon de calculer $\hat{\gamma}_s$ [BEC]
- Appli : Γ holom sur $\{\mathrm{Re}\, z>0\}$] [TAU] fin bon on le sait
- Appli : densité polyn ⊥] [BEC]

Dév 2

Réf : [TAU] : Tauvel - Analyse cplx pour la licence

[BEC] : Beck - Obj Agrég

[QUE] - H et M Queffélec - Analyse cplx et applications

([A.M.] Amar-Matheron Ancplx ← vrm compliqué parfois et peut être remplacé à peu près partout)