243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

→ Rapport du jury :

- Critères (Cauchy, D'Alembert) pour estimer R + Formule de Cauchy-Hadamard + techniques $\leqslant, \sim, o$
- Série entière en 0 de rayon R, développable en Σ ent. en un pt $z_0 \in D(0,R)$ et minorer R_{z_0}
- Quelques séries entières classiques ($\exp$, $\log$, $\frac{1}{1-z}$) sans regarder les notes
- Définition de exp et csq sur prop. de la fct
- Résultat d'existence du dév en Σ ent pour les fct dont on contrôle ttes les dérivées successives sur un $\mathcal{V}(0)$
- $\neq$ mode de CV à l'intérieur de $D(0,R)$
- Fct gén. de v.a
- Thm d'Abel + taubériens
- Propriétés liées à l'analyticité de la somme d'une Σ ent
- Résolut° d'EDO par la méthode de dév. en Σ ent.

Dév :	Réf
Thm d'Abel ang	[GOU] + [BEC] (obj Agreg)
EDO avec Σ ent (Bessel)	Oraux X-ens Analyse 4 [FRAN] 1

[GOU] [BEC] | [QUÉ] : Zuily - Queffélec - Analyse pour l'agreg
[ElAm] El-Amrani - Suites et séries | [RUD] Rudin | [FRA] : Oraux X-ens Analyse 4

Plan 241

I) Séries entière et rayon de CV

[GOU] + [ElAm] ?

A) Rayon de CV

→ déf, critères Abel, d'Alembert Hadamard + critères de comparaisons

B) Opérations sur Σ ent et comparaisons

→ somme, produit de Cauchy

II) Propriétés de la somme :

[GOU] + [QUÉ] + [RUD] ?

A) Régularité à l'intérieur du disque :

→ continuité, $\mathcal{C}^\infty$, intégration (dans $\mathbb{R}$) + Lien avec Σ de Taylor + fct dév en Σ ent. + exemples classiques

B) Lien avec les fonctions holom / analytiques

→ (déf holom) + déf analytique + Thm holom = analyt
→ principe des zéros isolés (pour Σ et pour holom) + prolongem^t analyt.
→ formule de Cauchy + rem sur Liouville...

[GOU] [BEC]

C) Pb au bord du disque

→ rem, ex, Abel angulaire + taubérien faible (Dév 1)

III) Applications

[QUÉ] ? [RUD] ? [ElAm] ?

A) Exp cplx

→ déf, prop, π, cos, sin ... [ElAm]

[GOU] + [QUÉ] + [FRA]

B) Éq. diff

→ méthode, ex, thm sur $y''+py'+qy$ + Éq de Bessel ([ElAm] + [FRA]) Dév 2

(voir si trop court : C) Σ génératrices en proba + nbres de Bell)

Plan détaillé [243] Séries entières

I) Séries entières et rayon de convergence :

A) Définitions et premières propriétés

[ElAm] p. 229 234

DÉF$_1$: Σ entière sur $\mathbb{C}$

Rem$_2$: Tout ce qu'on va faire reste valable en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$

DÉF$_3$: Fonction somme

Ex$_4$: $\sum n z^n$, $\sum 4^n z^{n!}$, $\sum \frac{2}{n}|z|^n$ ~~$\sum 4 z^{\frac{n}{3}}$~~

Lemme$_5$: Lemme d'Abel

THM$_6$: existence unicité de R tq $|z|<R \Rightarrow \sum a_n z^n$ CV
$|z|>R \Rightarrow \sum a_n z^n$ DV

DÉF$_7$: Rayon de CV R + disque de CV, dire que c'est le même qu'au dessus !

Rem$_8$: la Σ peut DV ou CV sur $\{z=R\} \rightsquigarrow$ exemples

• Convention : $\left[\frac{1}{0}=+\infty, \ \frac{1}{+\infty}=0\right]$

PROP$_9$: Règle de D'Alembert

Ex$_{10}$: $\sum \frac{z^n}{n!}$, + rem si pas de limite ex $\sum (2+(-1)^n) z^n$

Rem$_{11}$: pour Σ lacunaires... poser $u_n = a_n z^n$ puis règle "classique" de D'Alemb.

THM$_{12}$: Formule d'Hadamard

B) Comparaisons et opérations de séries entières :

$\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ 2 séries entières de rayon de CV R_a, R_b.

PROP$_{13}$ Si $\forall n$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$

Ex$_{14}$: $\sum e^{\hat{}} z^n$, $\sum e^{\cos}$

Prop$_{14}$: O et $\sim$

THM$_{15}$:
- rayon de CV de $\sum (a_n+b_n) z^n$
- ______ $\sum (\lambda a_n) z^n$
- rayon de CV $\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum c_n z^n$, définir c_n — produit de Cauchy

Déf$_{16}$: Σ dérivée

Prop$_{17}$: $R' = R$

II) Propriétés de la somme :

A) Fonctions développables en séries entière et régularité :

[ElAm] p. 239 251

THM$_{18}$: $\sum a_n z^n$ CV normalement sur tout compact $\subset D(0, R_a)$

Conséquence$_{19}$: continuité de S sur $D(0,R)$

• Dans la suite, on se place dans le cas réel

THM$_{20}$: S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$

THM$_{21}$: Intégrat° terme à terme

Ex$_{22}$: $\frac{1}{1+x} = \sum x^n \to \frac{1}{(1+x)^2} = \sum (n+1) x^n$, $\ln(1+x) = \sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Déf$_{23}$: fct dév. en Σ ent en 0, et en x_0

Ex$_{24}$: Polynôme avec formule de Taylor

Prop$_{25}$: Si f dév en Σ ent en x_0, alors $\exists\, \mathcal{V}(x_0)$, $f \in \mathcal{C}^\infty$, et $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Rem$_{26}$: ex. fct $\mathcal{C}^\infty$ non dév en Σ ent en 0. $e^{-1/x^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}$

Prop$_{27}$: f $\mathcal{C}^\infty$ sur $I =]-a;b[$ ($a>0, b>0$) $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
f dév en Σ ent en $0 \iff R_n \xrightarrow{s} 0$ sur $J \subseteq I$ intervalle ouvert contenant 0.

Exemples classiques : $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, arctan,

Prop$_{27'}$: $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, $I =]-\alpha;\alpha[$, si $\exists \rho>0, M\geq 0$ tq $\forall x \in I, \forall n$, $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M n!}{\rho^n}$, alors f dév en Σ ent. en 0 sur $]-R;R[$ $R = \min(\alpha,\rho)$

B) Lien avec les fonctions analytiques :

[GOU] p.253 — DÉF$_{28}$: Fct analytique

[RUD] p.250 — Lemme$_{29}$: Thm de Cauchy sur Ω convexe

[ElAm] p.234 238 — THM$_{30}$: Formule de Cauchy sur Ω CVX

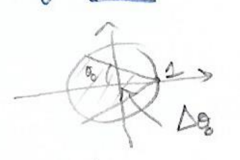
[GOU] p.237 — Ex$_{31}$: Formule de Cauchy pour $\sum a_n z^n$ de rayon R $\forall 0<r<R$ $\forall n$, $a_n 2\pi r^n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}$
+ remarque sur Thm de Liouville

[RUD] p.251 — THM$_{31}$: fct holomorphe = fct analytique

[GOU] p.236 — THM$_{32}$: Thm des zéros isolés pour les Σ ent

[RUD] p.252 — THM$_{33}$: Thm des zéros isolés sur Ω ouv. connexe pour les fct ~~holom~~ analytiques

Conség$_{34}$: Principe du prolongement analytique



C) Problèmes au bord du disque de CV.

[BEC] p. 79 et 50 — THM$_{35}$: exo 2.5 Obj agrég

THM$_{36}$: Abel Angulaire + 1 application DEV 1

p.251 [GOU] — THM$_{37}$: Taubérien faible

Plan détaillé $\boxed{243}$ Suite

III) Applications :

A) Exponentielle complexe :

[ElAm] p. 251 – 255

éf$_{38}$: déf $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ rayon de CV $= +\infty$

rop39 : $\exp : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z \longmapsto e^z \end{array} \right.$ morphisme de groupes continu de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$

ROP$_{40}$: $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$, $|e^z| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

HM$_{41}$: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjectif.

HM$_{42}$: $\varphi : \left| \begin{array}{l} (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{U}, \times) \\ x \longmapsto e^{ix} \end{array} \right.$ morphisme de grpe continue, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\mathrm{Ker}\,\varphi = a\mathbb{Z}$

éf$_{43}$: $\boxed{\pi = 2a}$

éf$_{44}$: $\cos z$, $\sin z$, $\mathrm{ch}\, z$, $\mathrm{sh}\, z$

rop$_{45}$: $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$

B) Équations différentielles :

[ElAm] p. 246 – 248

éthode$_{46}$: Pour mq une fct f est dév en Σ ent on peut :
- Trouver une EDL d'ordre 1 ou 2 à coeff polyn. tq f soit solut° d'un Pb de Cauchy.
- Supposer f DSE et en déduire ses coeff
- Étudier le rayon de CV de la Σ ent. obtenue, si $R \neq 0$, la somme est solut° du Pb de Cauchy sur $]-R ; R[$ $\rightsquigarrow$ $dc = f$.

ppli$_{47}$: $f : x \mapsto (\arcsin x)^2$, $\forall x \in]-1 ; 1[$, $(\arcsin x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}$

[FRA An 4] p. 101 – 102

em$_{48}$: le dév. en série entière permet aussi de résoudre des équations diff. ou encore on peut, grâce à une éq diff, exprimer ~~une~~ la somme d'une Σ entière sous une autre forme

ppli$_{48}$: Éq. de Bessel Dév2

$\rightarrow$ Si VRM c'est trop court : $\boxed{\text{Parler des fct génératrice}}$ [GOU Alg]

Réf : [ElAm] : El Amrani - Suites et séries numériques suites et séries de fonctions

[GOU] : Gourdon - Analyse Les Maths en tête

[RUD] : Rudin - Analyse réelle et complexe

[BEC] : Beck - Objectif Agrégation

[FRA-An4] Francinou - Oraux X-ens Analyse 4