241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

· On note X un ensemble, $(E,\|\cdot\|)$, $(F,\|\cdot\|)$ 2 espaces de Banach sur le corps $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
· $(f_n)_n$ est une suite de fonctions de X dans E. On note $f : X \to E$; $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

I) Convergence simple et uniforme :

A) Suites de fonctions :

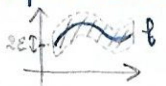
[GOU] p 221

DEF$_1$: $(f_n)_n$ converge simplement (CVs) vers f sur X lorsque : $\forall x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$. On note $f_n \xrightarrow{s} f$.

Ex$_2$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. $(f_n)_n$ CVs vers la fonction $\mathbb{1}_{\{1\}}$ sur $[0,1]$

DEF$_3$: $(f_n)_n$ converge uniformément (CVu) vers f sur X lorsque :
$\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall n \geq N, \|f_n(x)-f(x)\| \leq \varepsilon$. On note $f_n \xrightarrow{u} f$.

REM$_4$: • La différence avec la convergence simple est que le rang N à partir duquel f_n est proche de f ne dépend pas du point $x \in X$ (il est uniforme).
• Graphiquement, si X est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $E=\mathbb{R}$, $f_n \xrightarrow{u} f$ lorsque à partir d'un certain rang, le graphe des $(f_n)_n$ est dans la zone hachurée.



[EPAm] 140 142

Ex$_5$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. $(f_n)_n$ CVu vers $[x \mapsto 0]$ sur $[0,a]$, $\forall a \in [0,1[$.

PROP$_6$: Si $(f_n)_n$ CVu vers f sur X, alors $(f_n)_n$ CVs vers f sur X.

REM$_7$: La réciproque est fausse : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
$f_n \xrightarrow{s} 0$ mais $f_n \not\xrightarrow{u} 0$.

[GOU] 29 221

THM$_8$ (Dini) : Soit $I=[a;b] \subseteq \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ suite croissante de fonctions continues sur I, qui converge simplement f sur I, avec f continue.
↳ Alors $f_n \xrightarrow{u} f$ sur I.

REM$_9$: • On a le même énoncé lorsque les fonctions $(f_n)_n$ sont croissantes sans avoir la suite $(f_n)_n$ croissante.
• Ce théorème est une réciproque partielle de la PROP$_6$.

PROP$_{10}$ (Critère de Cauchy uniforme) :
$f_n \xrightarrow{u} f$ sur $X \Leftrightarrow [\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, \forall x \in X, \|f_p(x)-f_q(x)\| \leq \varepsilon]$

Cor$_{11}$: On note $\mathcal{B}(X,E)$ l'espace des fonctions bornées sur X, on le munit de la norme : $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X}\|f(x)\|$. Alors $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

THM$_{12}$: (Polynômes de Bernstein) : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue, et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(f) = \left[x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$. Alors $B_n(f) \xrightarrow{u} f$ sur $[0,1]$. [GOU] p.232

Cor$_{13}$: (Théorème de Weierstrass) :
Toute fonction $f : I \to \mathbb{C}$ continue sur un segment $I \subseteq \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur I. [GOU] [EPAm] p 156

B) Séries de fonctions :

DEF$_{14}$: • La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge simplement vers une fonction notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur X.
• La série $\sum f_n$ converge uniformément sur X lorsque $(S_n)_n$ CVu sur X. [EPAm] p 189

REM$_{15}$: Tous les résultats du I.A) restent vrais avec $(S_n)_n$.

Ex$_{16}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x e^{-nx}$. * $\sum f_n$ CVs sur $\mathbb{R}^+$
* $\sum f_n$ CVu sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$. [EPAm] p.190

DEF$_{17}$: • $\sum f_n$ converge absolument (CV$_A$) sur X lorsque : $\forall x \in X$, $\sum \|f_n(x)\|$ converge.
• $\sum f_n$ converge normalement (CV$_N$) sur X lorsque : * $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{B}(X,E)$
* $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

REM$_{18}$: On a le schéma d'implications suivant :

$$\begin{array}{ccc}\boxed{CV_A} & \Longrightarrow & \boxed{CV_S}\\ \Uparrow & & \Uparrow\\ \boxed{CV_N} & \Longrightarrow & \boxed{CV_U}\end{array}$$

La convergence normale est donc, en général, un outil pour prouver une convergence uniforme.

Ex$_{19}$: • La série de l'ex$_{16}$ converge en fait normalement sur $[a;+\infty[$, $\forall a>0$
• $\sum f_n$ peut converger uniformément et absolument mais pas normalement
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in [0,1) \mapsto \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}[}(x)$. [EPAm] p.194

C) Régularité et interversion de limites :

THM$_{20}$: Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions continues de $X \subseteq E$ dans F.
Si $f_n \xrightarrow{u} f$ sur X, alors f est continue sur X. [EPAm] p.146

Ex$_{21}$: $[x \mapsto x^n]_{n\in\mathbb{N}}$ CVs vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$ sur $[0,1]$. Or $\mathbb{1}_{\{1\}}$ non continue, donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

REM$_{22}$: Une suite de fonctions continues peut converger simplement vers une fonction continue sans que la convergence soit uniforme :
$\left(f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+(x-n)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CVs vers 0 sur $\mathbb{R}$ mais non uniformément. [HAU] p236

[EPAm] p.146

THM$_{23}$ (de la double limite) : Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions de $X \subseteq E$ dans F, convergeant uniformément vers f sur X. Soit $a \in \overline{X}$, on suppose que les limites suivantes existent : $b_n := \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Alors $(b_n)_n$ admet une limite b, et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.
On a en fait $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = \lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)}$.

[HAU] p.235

REM$_{24}$: L'hypothèse de convergence uniforme est nécessaire : on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in [0;1] \mapsto x^n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{x \to 1} f_n(x) \neq \lim\limits_{x \to 1} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

Dans la suite, on considère des fonctions $(f_n)_n$ de $I = [a;b] \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

[GOU]

THM$_{25}$: On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur I, et $f_n \xrightarrow{u} f$ sur I.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$

[HAU] p.244

Contre-ex$_{26}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{vmatrix} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto n^2 x\, \mathbb{1}_{[0;\frac{1}{n}[}(x) + (-n^2 x + 2n)\, \mathbb{1}_{[\frac{1}{n};\frac{2}{n}]}(x) \end{vmatrix}$
$f_n \xrightarrow{s} 0$ mais $\int_0^1 f_n(t)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Appli$_{27}$: Si $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n g(x)\,dx = 0$, alors $g = 0$.

[GOU] / [EPAm]

Cor$_{28}$: Soit $\sum f_n$ série de fonctions continues sur I, convergeant uniformément sur I, alors $\int_a^b \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$

[GOU] p.224, 225

THM$_{29}$: On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I, il existe $x_0 \in I$ tq $f_n(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$ et $(f_n')_n$ CVU sur I.
Alors $(f_n)_n$ CVU sur I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, et $f' = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'$.

REM$_{30}$: Avec un raisonnement par récurrence, on déduit qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ de classe $\mathcal{C}^p$ telle que : $\forall k \in [\![0;p]\!]$, $(f_n^{(k)})_n$ CVU vers une fonction g_k, converge uniformément vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^p$ tq $f^{(k)} = g_k$, $\forall k \in [\![0;p]\!]$.

[GOU] p.278

Ex$_{31}$: La fonction Zêta de Riemann : $\zeta : s \in]1;+\infty[\mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$.

[HAU] p.241

REM$_{32}$: L'hypothèse de convergence uniforme des dérivées est nécessaire :
$(f_n)_n = \left(x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ CVU sur $\mathbb{R}$ vers $|\cdot|$ non dérivable sur $\mathbb{R}$.

Thm de Montel ?

II) D'autres formes de convergence : L^p et presque-partout :

[LI] p.133 [QUE] p.520

On note $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_n$ suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}_+}$) ; de même pour f.

DEF$_{33}$: $(f_n)_n$ converge μ-presque partout (μ-p.p) vers f lorsqu'il existe $A \subseteq \Omega$ négligeable tel que : $\forall x \in A^c$, $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

DEF$_{34}$: Soit $p \in [1;+\infty[$, $(f_n)_n \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ $(= L^p(\mu))$
• $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^p(\mu)$ lorsque $\int_\Omega |f_n - f|^p\,d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Pour $(f_n)_n \subseteq L^\infty(\mu)$, $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^\infty(\mu)$ lorsque $\underbrace{\inf\{M > 0 \mid \mu(\{|f_n - f| > M\}) = 0\}}_{= \|f_n - f\|_\infty} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

REM$_{35}$: • Cette définition implique que la fonction limite f est dans le même espace que les $(f_n)_n$.
• $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^p} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mu\text{-p.p}} f$ et $f_n \xrightarrow{\mu\text{-p.p}} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Ex$_{36}$:
• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = n\, \mathbb{1}_{]0;\frac{1}{n})} \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. $f_n \xrightarrow{\lambda\text{-p.p}} 0$ mais $\|f_n\|_1 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
donc $f_n \not\to 0$ dans $L^1(\lambda)$.
• On construit par récurrence une suite $(g_n)_n$:
$g_0 = \mathbb{1}_{[0;1]}$, $g_1 = \mathbb{1}_{[0;\frac{1}{2})}$, $g_2 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2};1]}$, $g_3 = \mathbb{1}_{[0;\frac{1}{3})}$, $g_4 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{3};\frac{2}{3})}$, $g_5 = \mathbb{1}_{[\frac{2}{3};1]}$ …
Alors $\|g_n\|_1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ mais $\forall x \in [0;1]$ $g_n(x) \not\to 0$.

[LI] p.109

THM$_{37}$ (Beppo-Lévy) :
On suppose que $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions de Ω dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, et $f_n \xrightarrow{\mu\text{-p.p}} f$, alors $\int_\Omega f\,d\mu = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$

THM$_{38}$: (Lemme de Fatou) : On suppose les $(f_n)_n$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, on a :
$\int_\Omega (\liminf\limits_{n \to +\infty} f_n)\,d\mu \leqslant \liminf\limits_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu$.

REM$_{39}$: L'inégalité peut être stricte : $f_n = \begin{vmatrix} n\, \mathbb{1}_{]0;\frac{1}{n}]} & \text{si } n \text{ pair} \\ 2n\, \mathbb{1}_{]0;\frac{1}{n}]} & \text{sinon} \end{vmatrix}$

DÉV.1 [RUD] p.83

APPLI$_{40}$: (Théorème de Riesz-Fischer) : Soit $p \in [1;+\infty]$
$(L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est complet

DÉV.1

Cor$_{41}$: Si $f_n \xrightarrow{L^p} f$, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui CV μ-p.p. vers f.

THM$_{42}$: (Convergence dominée) : On suppose $(f_n)_n \subseteq L^1(\mu)$.
Si • $f_n \xrightarrow{\mu\text{-p.p}} f$ et il existe $g \in L^1(\mu)$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ μ-pp.
Alors $f \in L^1(\mu)$ et $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^1} f$.

Ex$_{43}$: $\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\,dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\alpha - 1}$ (pour $\alpha > 1$)

III) Séries de fonctions classiques :

A) Séries entières :

[EP Am] p.230-231

On note $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ une suite, $\sum a_n z^n$ la série entière associée, et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sa somme lorsqu'elle existe.

LEMME$_{44}$ (Abel) : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Cela conduit à la définition du rayon de convergence :

[GOU] p.234-236

DEF$_{45}$: Le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ est : $R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_n \text{ bornée}\}$.

REM$_{46}$:
- Sur $D(0,R)$, $\sum a_n z^n$ CV absolument
- Sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,R)}$, elle diverge grossièrement
- $\forall r \in [0;R[$, $\sum a_n z^n$ CV_N sur $\overline{D(0,r)}$

PROP$_{47}$: (Règle de D'Alembert) : Si à partir d'un certain rang, $a_n \neq 0$ et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ avec $L \in \overline{\mathbb{R}^+}$, alors le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ est $R = 1/L$ (avec $\frac{1}{0} := +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} := 0$).

REM$_{48}$: Sur le cercle $\mathcal{C}(0;R)$, on ne peut rien dire de la convergence de $\sum a_n z^n$.
$\hookrightarrow \sum z^n$ a un rayon de CV $R = 1$ et diverge en $z = 1$.
$\sum \frac{z^n}{n^2}$ a un rayon de CV $R = 1$ et converge pour tout $z \in \mathcal{C}(0,1)$.

PROP$_{49}$: L'application $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0,R)$, où R est le rayon de convergence.
On a même f est $\mathbb{C}$-dérivable infiniment, et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme.

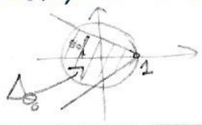
Ex$_{47}$: La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$, et définit la fonction exponentielle qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, avec $\exp' = \exp$.

Ex$_{48}$: $\forall x \in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$; donc $\forall x \in]-1;1[$ $\begin{cases} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \end{cases}$

Le Théorème suivant répond partiellement à la question : « Que se passe-t-il au bord du disque $D(0,R)$? ».

[GOU] p.250 DEV2

THM$_{49}$ (Abel angulaire) : Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de la série sur $D(0,1)$. Soit $\theta_0 \in [0;\frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_{\theta_0} = \left\{z = 1 - \rho e^{i\theta} \mid \begin{smallmatrix} |z|<1 \\ \rho>0,\ |\theta| \leq \theta_0 \end{smallmatrix}\right\}$. Alors $\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.



[GOU]

APPLI$_{50}$: En reprenant les exemples 48 on obtient
$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; $\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

B) Séries de Fourier :

Soit f une fonction 2π-périodique ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) et intégrable sur $[0;2\pi]$ (On note $f \in L^1_{2\pi}$) [GOU]

DEF$_{51}$: La série de Fourier de f est la série formelle $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ où $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\,dt$ et $e_n : t \mapsto e^{int}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

On note $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$ la somme partielle de la série de Fourier de f.

Ex$_{52}$:
- Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f_\alpha(t) = e^{i\alpha t}$, $\forall t \in [-\pi;\pi]$. $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{sinc}(\pi(\alpha - k)) e_k$
- Si $g(x) := 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi;\pi]$ (et rendue périodique sur $\mathbb{R}$)

$$S_n(g) = \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{(-1)^{k+1} \times 2}{\pi^2 k^2} e_k + \frac{2}{3} e_0$$

[QUE]

THM$_{53}$: On note $\sigma_N(f) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k(f)$ le noyau de Dirichlet
- Si f est continue, $\sigma_N(f) \xrightarrow{u} f$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $f \in L^p$ ($p \in [1;+\infty[$), $\sigma_N(f) \xrightarrow{L^p} f$.

[GOU] p.257

THM$_{54}$ (Parseval) : Si $f \in L^2_{2\pi}$, $S_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{L^2} f$, d'où $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

Ex$_{55}$: En reprenant l'exemple 52, les fonctions sont dans L^2 donc :
$1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi(\alpha-n))}{\pi^2(\alpha-n)^2}$ et $\frac{\pi^2}{90} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

REM$_{56}$: Toute série trigonométrique n'est pas la série de Fourier d'une fonction de $L^2_{2\pi}$: exemple $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\cdot)}{\sqrt{n}}$

[QUE]

THM$_{57}$: (Dirichlet) : On suppose f $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0;2\pi]$, alors :
$\forall x \in [0;2\pi]$, $S_n(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ où $f(x^+) := \lim_{\substack{t\to x \\ t>x}} f(t)$ et $f(x^-) := \lim_{\substack{t\to x \\ t<x}} f(t)$

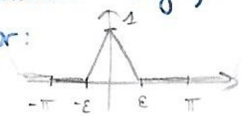
Cor$_{58}$: Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $[0;2\pi]$, alors la série de Fourier CVs vers f et même CV_N vers f.

[GOU]

APPLI$_{59}$: On reprend la fonction g de l'exemple 52, on a alors $S_n(g)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$, $\forall x \in [-\pi;\pi]$, donc par évaluation en 0 ou π on obtient :
$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$

[QUE] p.91

Ex$_{60}$ (Fonction triangle) : Soit $0 < \varepsilon < \pi$ et Δ_ε la fonction continue 2π-périodique définie par :



Via le THM$_{57}$ on obtient : $\forall t \in \mathbb{R}$,
$$\Delta_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos(n\varepsilon)}{n^2\pi\varepsilon} \cos(nt)$$

[GOU] Gourdon, Analyse, Les maths en tête.
[EP Am] El Amrani, suites et séries numériques, suites et séries de fonctions
[HAU] : Hauchecorne, Les contre-exemples en mathématiques
[RUD] : Rudin, Analyse complexe et réelle ; [LI] : Li, Intégration et applications ; [QUE] : Analyse pour l'agrégation, Queffélec