Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Étude de la régularité :

A) Continuité sous l'intégrale :

[GRI] p.134

THM₁ : (Convergence dominée). Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions mesurables telles que : $(f_n : \Omega \to \mathbb{K})$
i) Pour μ-presque tout x, $(f_n(x))_n$ converge
ii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$, μ-p.p.
Alors : il existe $f \in L^1(\mu)$ telle que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-p.p.}} f$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0$

[QUÉ] p.306

THM₂ : Soit $f : E \times \Omega \to \mathbb{C}$, où (E,d) espace métrique. Soit $F : t \in E \mapsto \int_\Omega f(t,x)\, d\mu(x)$
On suppose : (i) $\forall t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ mesurable
(ii) Pour presque tout $x \in \Omega$, $t \mapsto f(t,x)$ continue en $t_0 \in E$
(iii) $\exists g \in L^1(\mu)$, indépendante de t, tq : $\forall t \in E$, pour presque tout $x \in \Omega$, $|f(t,x)| \leq g(x)$
Alors F est continue en t_0.

Cor₃ : Avec les notations du THM₂, on suppose :
(i) $\forall t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ mesurable ; (ii) Pour presque tout x, $t \mapsto f(t,x)$ continue sur E
(iii) $\forall K \subseteq E$ compact, $\exists g \in L^1(\mu)$ tq. $\forall t \in K$, μ-p.p. en x, $|f(t,x)| \leq g(x)$
Alors F est continue sur E.

[HAU] 224

Contre-ex₄ : L'hypothèse (iii) est importante : Soit $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto te^{-xt} \end{vmatrix}$ continue, $F(t) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dx = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$
F est non continue en 0.

[GRI] 141

Rem₅ : Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où m est la mesure de comptage. On retrouve le résultat de continuité des séries de fonctions : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continues et $\sum \sup_{x\in E} |f_n(x)| < +\infty$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur E.

B) Dérivabilité sous l'intégrale : $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle ouvert non vide.

[QUÉ] p.307

THM₆ : Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{K}$ et $F : t \in I \mapsto \int_0^{+\infty} f(t,x)\,d\mu(x)$. On suppose :
(i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x) \in L^1(\mu)$
(ii) Pour presque tout x, $t \mapsto f(t,x)$ dérivable sur I
(iii) $\forall K \subseteq I$ compact, $\exists g \in L^1(\mu)$, $\forall t \in K$, pour presque tout x, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$.
Alors $\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot) \in L^1(\mu)$ et F dérivable sur I : $\forall t \in I$, $F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x)$.

Cor₇ : Avec les mêmes notations. Si : (i) $\forall t \in I$, $f(t,\cdot) \in L^1(\mu)$
(ii) Pour presque tout x, $f(\cdot,x) \in \mathcal{C}^k(I)$; (iii) $\forall j \in [\![1;k]\!]$, $\forall K \subseteq I$, compact, $\exists g_{j,K} \in L^1(\mu)$, $\forall t \in K$, pour presque tout x, $\left|\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(t,x)\right| \leq g_{j,K}(x)$.
Alors $F \in \mathcal{C}^k(I)$, $\forall j \in [\![0;k]\!]$, $\forall t \in I$, $F^{(j)}(t) = \int_\Omega \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t,x)\,d\mu(x)$ où $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t,\cdot) \in L^1(\mu)$ $\forall t \in I$.

[QUÉ] p.308

Rem₈ : On peut remplacer I par Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, et dérivable par différentiable

♥ cf lemme de Morse

Ex₉ : $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert convexe, $0 \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, alors $\varphi : x \in U \mapsto \int_0^1 f(tx)dt$ est $\mathcal{C}^1$

[HAU] p.226

Contre-ex₁₀ : L'hypothèse de domination est importante :
$f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ (t,x) \mapsto t^2 e^{-x|t|} \end{vmatrix}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $F(t) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dx = |t|$ non dérivable en 0.

[GOU] + [QUÉ]

Appli₁₁ : Étude de Γ : $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ **DÉV 1**
1) Γ bien définie
2) Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et convexe

3) $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ 4) Tableau de variations de Γ	ou	3) Formule d'Euler-Gauss : $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

C) Holomorphie sous l'intégrale :

[QUÉ] p.308

THM₁₂ : Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $f : U \times \Omega \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall z \in U$, $x \mapsto f(z,x) \in L^1(\mu)$
(ii) Pour presque tout x, $z \mapsto f(z,x)$ holomorphe sur U
(iii) $\forall K \subseteq U$ compact, $\exists g \in L^1(\mu)$, $\forall z \in K$, pour presque tout x, $|f(z,x)| \leq g(x)$
Alors $F : z \in U \mapsto \int_\Omega f(z,x)d\mu(x)$ holomorphe, avec $F'(z) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,d\mu(x)$. Où $\frac{\partial f}{\partial z}$ est la dérivée holomorphe de $f(\cdot,x)$.

[QUÉ] p.312 ♥

Ex₁₃ : Γ est prolongeable en une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$
Ex₁₄ : $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > 1\}$.

II) Produit de convolution et régularisation

A) Définitions et premières propriétés :

[QUÉ] p.319

Déf₁₅ : Soit f, g 2 fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Le produit de convolution de f et g est formellement la fonction $f * g$ définie par $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$,

Rem₁₆ : • $f*g(x) = g*f(x)$.
• $f*g(x)$ n'est pas toujours défini. Il faut rajouter des hypothèses sur f et g.

Prop₁₇ : • Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f*g(x)$ est défini p.p. et $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ avec $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \times \|g\|_1$.
• Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f*g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
• Si f est bornée sur tout compact et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact, $f*g$ est défini partout sur $\mathbb{R}^n$.

[BRI] p. 263

Ex 18: $f * 0 = 0$, $f * \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda$

$\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = x \, \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2-x)\, \mathbb{1}_{]1;2]}(x)$.

[BRI] p. 265

Prop 19: Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q \in [1;+\infty]$
$f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^n$, uniformément continue et bornée par $\|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

[BRI] p. 267

Prop 20: $(L^1(\mathbb{R}^n), +, \cdot, *)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative

Rem 21: Cette algèbre n'a pas d'unité.

[BRI] p. 269

Prop 22: Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1$

B) Approximation de l'unité et régularisation :

[El Am] p. 86

Déf 23: Une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ est une approximation de l'unité lorsque : (i) $\forall n \geq 1$, $\alpha_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(x)\,dx = 1$

(ii) $\forall \delta > 0$, $\lim_{n \to \infty} \int_{\|x\| > \delta} \alpha_n(x)\,dx = 0$.

[BRI] p. 269

Rem 24: On peut construire une telle suite à partir d'un élément $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tq $\alpha \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha \, d\lambda = 1$, on pose $\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$

[El Am] p. 86 ou [BRI]

Ex 25:
- Approximation de Laplace : $\varphi_n(x) = \frac{n}{2} e^{-n|x|}$
- ——— de Cauchy : $\varphi_n(x) = \frac{n}{\pi} \times \frac{1}{1+(nx)^2}$
- ——— de Gauss : $\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{nx^2}{2}}$.

[El Am] p. 115

Rem 26: On peut aussi considérer une famille d'approximations où le paramètre est réel (et non dans $\mathbb{N}$). Par ex : On définit le noyau de Gauss : $\forall x \in \mathbb{R}^d$
$\gamma_s(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi s})^d} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2s}\right)$, pour $s > 0$. $(\gamma_s)_{s \to 0}$ approximation de l'unité

[El Am] p. 87 ou [BRI]

THM 27: Soit $(\alpha_n)_n$ une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$
* Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée, alors $f * \alpha_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ sur $\mathbb{R}^d$
* Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1;+\infty[$, $f * \alpha_n \xrightarrow{L^p} f$.

THM 28: Si $\varphi \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ à support compact, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $f * \varphi$ est définie partout sur $\mathbb{R}^d$ et $f * \varphi \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ avec : $\forall i \in [\![1;d]\!]$, $\forall k \in [\![0;n]\!]$, [BRI] p. 273 – 274
$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}(f * \varphi) = f * \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_i^k}$

Rem 29: On peut combiner les approximations de l'unité et la régularité en considérant des suites régularisantes (= approximation de l'unité, dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$), qui peuvent être construites à partir de $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right)\mathbb{1}_{\|x\|<1}$ – 275

Csq 30: $\forall p \in [1;+\infty[$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ dense dans $L^p(\lambda)$.

III) Un exemple fondamental :

A) Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

Déf-Prop 31: Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier : [El Am] p. 107
$\mathcal{F}(f) = \hat{f} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt}\,dt$. L'application $\mathcal{F}$ est linéaire, continue – 113
de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \mid \lim_{\pm\infty} f = 0 \}$. (= Lemme de Riemann-Lebesgue)

Rem 32: Toute la partie peut s'adapter sur $L^1(\mathbb{R}^d)$, en posant $\mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{-i\langle x,t \rangle}\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Et les résultats suivants restent valable, avec une adaptations sur le paramètre d.

Ex 33: $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2} e^{-|t|}\right)(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1;1]})(x) = 2\,\mathrm{sinc}(x)$, $\mathcal{F}(\gamma_s)(x) = e^{-\frac{x^2 s}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{s}}\, \gamma_{s^{-1}}(x)$
où γ_s est le noyau de Gauss sur $\mathbb{R}$ défini en Rem 26.

Notations 34: Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, on note $f_\sigma : x \mapsto f(-x)$; $\tau_a f : x \mapsto f(x-a)$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $\overline{\mathcal{F}}(f) : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt}\,dt$.

Prop 35: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a :
- $\mathcal{F}(f_\sigma) = \mathcal{F}(f)_\sigma$; $\mathcal{F}(\bar{f}) = (\overline{\mathcal{F}(f)})_\sigma$; $\overline{\mathcal{F}}(\bar{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\forall a \in \mathbb{R}$, on a :
$\mathcal{F}(f(\lambda \cdot))(x) = \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{x}{\lambda}\right)$; $\mathcal{F}(\tau_a f)(x) = e^{-iax} \mathcal{F}(f)(x)$; $\mathcal{F}(e^{ia\cdot} f)(x) = \tau_a(\mathcal{F}(f))(x)$.

Prop 36: $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ p. 114

Rem 37: On peut alors facilement montrer que l'algèbre $(L^1, +, \cdot, *)$ n'a pas d'unité

III) A)

ElAm p.115 – 116

THM 38 (Formule de Dualité) : $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)\,dx$

THM 40 : $\mathcal{F} : \begin{array}{l} L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto \hat{f} \end{array}$ est injective.

THM 39 (Formule d'inversion) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{\hat{f}} = 2\pi f_\sigma$ λ-p.p.

BEC 110 – 112

Appli 40 : Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle, $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction poids (ie mesurable, strictement positive et tq : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$). On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure $\rho . d\lambda$, c'est un Hilbert.
• On considère $(P_n)_n$ la famille des polynômes orthogonaux de $L^2(I,\rho)$ construite grâce à Gram-Schmidt appliqué à $(X^n)_n$.

Dev 2

Si il existe $\alpha > 0$ tq $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$, alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Rem 41 : avec le poids $\rho(x) = e^{-x^2}$, on retrouve les polynômes $(H_n)_n$ de Hermite, on peut en déduire que $(H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}})_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

ElAm p.120 – 122

Prop 42 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f'}(x) = ix\hat{f}(x)$

Cor 43 : $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^k \cap L^1(\mathbb{R})$ tq $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f^{(k)}}(x) = (ix)^k \hat{f}(x)$

Prop 44 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \overset{g}{\mapsto} xf \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ dérivable : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\hat{f}'(x) = -i\hat{g}(x)$

Cor 45 : Si $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $x \mapsto x^j f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^k$ avec ; $\forall x \in \mathbb{R}$ $\hat{f}^{(k)}(x) = (-ix)^k \hat{f}(x)$.

♡

Csq 46 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $x \mapsto x^k \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors f coïncide λ-p.p. avec une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

B) Applications en probabilités :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Déf 47 : Pour $X : \Omega \to \mathbb{R}$ variable aléatoire, on définit sa fonction caractéristique : $\varphi_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,d\mathbb{P}_X(x)$

Rem 48 : Au signe près, φ_X est une extension de la transformée de Fourier aux mesures de probabilité.
• Si X est une v.a.r. à densité f, $\varphi_X(x) = \hat{f}(-x)$, si $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R})$, on retrouve f par la formule d'inversion.

Ex 49 : • Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = pe^{it} + (1-p)$
• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$
• Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Prop 50 : Si $X \in L^k(\mathbb{R})$ ($k \in \mathbb{N}$), alors φ_X est $\mathcal{C}^k$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^k e^{itX}]$

Rappels 51 : Soit $(X_n)_n$ et X des v.a.r. $(X_n)_n$ converge en loi vers X lorsque : $\forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$ ($\Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$)

THM 52 (Lévy) : $(X_n)_n$ des v.a.r, X v.a.r.
$(X_n)_n$ converge en loi vers $X \Leftrightarrow \varphi_{X_n} \xrightarrow{S} \varphi_X$.

Appli 53 : (Théorème central limite)
Soit $(X_n)_n$ suite iid. dans L^2. On pose $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = V(X_1)$ et $Z_n = \frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}$
Alors $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Réf :

- [BRI] - Briane-Pagès - Théorie de l'intégration
  ↑ (peut être remplacé par [QUÉ] + [El.Am])
- [QUÉ] - Queffélec-Zuily - Analyse pour l'intégration
- [HAU] - Hauchecorne (ex.-contre-ex)
- [El.Am] - El Amrani - Analyse de Fourier

Pour dév :

dév 1 : [GOU] + [QUÉ]

dév 2 : [BEC] - Beck - Objectif Agrég