Leçon $\boxed{235}$: Problèmes d'interversion en analyse.

→ **Rapport du jury :**

- Intervert° limite-limite / lim-∫ / ∫-∫
- Thm cruciaux du cours
- Rôle de CV uniforme (et CV normale pour Σf_n, f_n fct bornées)
- Thm : CV monotone ✓
  CV dominée ✓
  · Fub-Ton
  · Fubini
- Contres-ex ⚠ hypothèses pour intervert°
- Exemples ($\hat{m}$ simples)
- T-F ou trans. Laplace : exemples et application

Dév	Réf
Fourier-Planch	El Amrani - An. de Fourier
Riesz-Fisch	Rudin
(Abel Angulaire)	(Beck)

- [El Am] El Amrani - suites et Σ num/de fct
- [GOU] Gourdon - Analyse
- [BEC] - Beck - Objectif agreg
- [BRI] - Briane - Analyse, théorie de l'intégration
- [RUD] Rudin
- [QUÉ] Queffelec - Analyse pour l'agrég.
- [El Am_F] El Amrani - Analyse de Fourier

Idée - Plan :

I) Interversion lim-lim

[ElAm] + [GOU] ou [BEC]

A) Convergence unif

B) Continuité

C) Dérivabilité
+ holomorphie

II) Interversion limite-∫ :

[BRI] + [RUD] ? [QUÉ] ? [BEC]

A) Thm de CV sous l'∫
CV dom, Fatou, CV monotone... Applicat° Riesz-Fischer (Dév 1)
(+ thm $\Sigma\int|\,| = \int\Sigma|\,|$ ... puis sans $|\,|$)

B) Intégrales à paramètres
cont, dér, holomorphie ex et contre-ex
+ ex fct Γ...
(+ densité polyn) ?

III) Interversion ∫-∫ et applicat°

[BRI]

A) Intégrales multiples
Fub-Ton, Fubini
applic : calculs int Gauss, $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
Contre-ex ?

[ElAm_F]

B) Applicat° à la transformée de Fourier-Plancherel
→ nes. prélim sur $f\mathcal{F}$, noyaux Gauss...
→ Thm Fourier-Plancherel (Dév 2)

Plan détaillé [235] Interversion

I) Interversion limite-limite : On se place sur $(E, \|.\|)$ evn, X un ensemble

A) Convergence uniforme :

[GOU] p. 231 – 233 + [EPAm] p. 140 – 146 – 196

Def 1 : • CV unif suite fct + dessin sur $\mathbb{R}$
• CV unif Σ fct $\Leftrightarrow$ à $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$

Prop 2 : CV ~~simp~~ unif $\Rightarrow$ CV simple

Ex 3 : $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0;\frac{1}{2}]$ pas sur $[0;1]$

THM 4 : critère de Cauchy uniforme

Def 5 : CV normale pour Σ fct

Ex 6 : $\Sigma \frac{x^n}{n^2}$ sur $[0;1]$

THM 7 : CV normale $\Rightarrow$ CV unif (E complet)

Rem 8 : CV unif revient à la CV sur $(B(X,E), \|.\|_\infty)$ qui est complet si E l'est

Prop 9 : critère d'Abel uniforme

THM 9 : Double limite (E complet)

Rem 10 : même thm pour Σf_n

B) Continuité

[GOU] p. 233, [EPAm] p. 146

THM 11 : CV unif et continuité en x_0 + continuité globale

Ex 12 : $(e^{nx})_n$ ne CV pas unif sur $\mathbb{R}_+$

[EPAm] p. 196 – 197

Rem 13 : • même thm sur Σ de fct
• $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ continue sur $\mathbb{R}$

Cor 14 : • même thm mais avec une CV unif. sur tout compact

Ex 15 : $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ continue sur $]1;+\infty[$

[GOU] p. 239

THM 16 : Thm de Dini

[BEC] p. 49 ou [GOU]

Rem 17 : Ces thm sont utilisés pour montrer que la somme d'une Σ ent est continue sur le disque ouvert de CV

THM 17 : Abel Angulaire

C) Dérivabilité :

[GOU] p. 234

THM 18 : CV uniforme et dérivées — E complet pour avoir seulement CV f_n en x_0 … — ou [EPAm] p. 149 - 150

[GOU] p. 234 – 235

Rem 19 : m̂ thm pour Σg_n

Cor 20 : Thm du caractère $\mathcal{C}^k$ d'une suite de fct

Appli 21 : E algèbre de Banach, $u\in E$, $\varphi_u : t\in\mathbb{R} \mapsto \exp(tu) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tu)^n}{n!}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi_u^{(p)} = u^p \varphi_u$

[EPAm]

Rem 22 : on obtient de même que la somme d'une Σ ent est $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0,R)$

Ex 23 : fct ζ

[RUD] p. 256

THM 24 : Thm de Weierstrass fct holomorphe

II) Interversion limite-intégrale : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espace mesuré

A) Thm de CV sous l'intégrale :

[BRI] p. 115

THM 25 : Beppo-Levi

THM 26 : Lemme de Fatou *

Appli 27 : appli 8.1 — $\int_0^1 f'(x)\,dx \leq f(1) - f(0)$

[RUD]

Appli 28 : Thm de Riesz-Fischer (Dev 1)

[BRI] p. 116 – 118

THM 29 : CV dominée

Appli 30 : f dérivable partout sur $[0,1]$, de dérivée f' bornée, alors $\int_0^1 f' = f(1) - f(0)$
+ rem si f dériv p.p.

[BRI] p. 119

Ex 31 : $\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha - 1}$, $(\alpha > 1)$

THM 32 : Échange $\Sigma / \int$

Appli sur [QUE] ?

B) Intégrale à paramètre :

[BRI] p. 121 – 123

THM 33 : continuité sous le signe $\int$

Ex 34 : T. F. de $f\in L^1$ est continue sur $\mathbb{R}$

Rem 34 : en appliquant le thm 33 avec $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ (mes. comptage) on retrouve la rem 13

[BRI] p. 123 – 125

THM 35 : Dérivat° sous l'intégrale

+ Cor 36 : dérivation globale ou caract. $\mathcal{C}^1$

Ex 37 : $f\in L^1$ et $x\mapsto xf(x) \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{C}^1$ et $\hat{f}' = i\widehat{xf(x)}$

Reste holomorphie, exs, appli $\to \Gamma$
↳ densité polyn ...

Plan détaillé $\boxed{235}$ suite

II) B)

THM$_{38}$: Holomorphie sous l'intégrale

Ex$_{39}$: $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$

Appli$_{40}$: $I \subseteq \mathbb{R}$ int., ρ fct poids tq $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$

la famille des polyn. $\perp$ associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$

[BEC] p. 68 ou [QUÉ] p 308

[QUÉ] p 312

[BEC] p. 112

III) Interversion intégrales et application :

A) Intégrales multiples :

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaces mesurés σ-finis. On munit $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ de la mesure produit $\mu \otimes \nu$

THM$_{41}$: Thm Fub-Ton

THM$_{42}$: Thm Fubini-Lebesgue

Rem$_{43}$: en gén, on vérifie les hyp de Fub-Leb grâce à Fub-Ton.

[BRI] p. 198 - 200

Appli$_{44}$: Intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

[GOU] p. 355

Appli$_{45}$: Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g$ défini p.p. et dans L^1

- $\|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$
- $\widehat{f*g} = \hat{f} . \hat{g}$

[RUD] p. 208

Rem$_{46}$: Dans thm 42, l'intégrabilité est cruciale : $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$

$\int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y) dx \right) dy = 0$ et $\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[0,1]} f(x,y) dy \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx > 0$

[BRI] p. 201

B) Application à la transformée de Fourier-Plancherel

p 110, 123

Rappel : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on définit sa T.F : $\mathcal{F}(f) = \hat{f} := x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt$

Déf$_{47}$: noyaux de Gauss : $\gamma_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}}$, $\forall s > 0$

Prop$_{48}$: • $(\gamma_s)_{s>0}$ est une approximation de l'unité

• $\hat{\gamma}_s = \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \gamma_{s^{-1}} = x \mapsto e^{-\frac{sx^2}{2}}$

→ peut-être formule d'inversion ?

Prop 49 : $\forall f \in L^1 \cap L^2$, $\hat{f} \in L^2$ et $\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 \times 2\pi$

Lemme$_{50}$: $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dense dans $L^2(\mathbb{R})$

[El Am F] p 120

THM$_{50}$ (Fourier-Plancherel) :

- $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ se prolonge en une 2π-isométrie $\mathcal{F}_2$ de $L^2 \to L^2$
- $\mathcal{F}_2$ est de plus surjective

Dév 2

Appli$_{52}$: Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi$

Réf :

[GOU] - Gourdon Analyse

[El Am] - El Amrani - suites et séries

[RUD] - Rudin

[BRI] - Briane - Théorie de l'intégration

[QUÉ] - Queffélec - Analyse pour l'agrégation

[El Am_F] - El Amrani - Analyse de Fourier

[BEC] - Beck (OA)