[234] Fct Lebesgue int.

I) Intégrale de Lebesgue :

A) Fonctions mesurables

[BRI] p. 65 – 73

$(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{A})$ 2 espaces mesurables.

Déf1 : fct mesurable

Ex2 : indicatrices ; fct cste ; fct continue entre 2 espaces métriques. (tribu borélienne)

Prop3 : $(f_n)_n : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ mesurables
sup/inf f_n mes ; $\lim_n f$ mes (si existe), $\overline{\lim}$, $\underline{\lim} f_n$ mes.

Déf4 : fct étagée ($\leftarrow$ mesurable)

THM5 (Lemme fondamental d'approximation) • $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. $\exists (f_n)_n$ fct étagée tq $f(x) = \lim f_n(x)$ $\forall x \in X$
• Si $f \geq 0$, les f_n peuvent être choisi ≥ 0 ↗

B) Définition de l'intégrale :

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$(X, \mathcal{F}, \mu)$ espace mesuré ~~…mesure~~

[BRI] p. 116 – 126

Déf6 : $\int$ fct étagée positive + $\int$ fct étagée ← f

Ex7 : dirac, mesure comptage

on en a besoin pour Beppo Levi
(Prop : f, g mes ≥ 0, $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$)

Déf8 : $\int$ fct mes ≥ 0 + fct intég (positive)

Rem9 : ↗ déf coïncide avec déf6 pr fct étagée ≥ 0

$\boxed{\text{Thm}_{9'} \text{ : Beppo-Levi}}$ ← le mettre là parce qu'on en a besoin après ← dire pq il est là dans défense de plan

THM10 $\neq$ de Markov

Déf11 : fct μ-intégrable + $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{F}, \mu)$

Rem12 : $|f| = f^+ + f^-$; $f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L}^1$

Déf12 : $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\int_X f \, d\mu = \begin{cases} \dots & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \dots & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$

THM13 : $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un $\mathbb{K}$-ev, $f \mapsto \int_X f \, d\mu$ est une forme lin ≥ 0 (définir) et donc ↗

C) Lien avec l'intégrale de Riemann :

pour Riemann-intégrable voir déf [BRI]

[LI int] p. 115 – 118

THM14 : $\forall$ fct $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ borélienne et Riemann-intégrable vérif $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$ et $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$

Rem15 : $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ mais non Riemann-intégrable [BRI] p. 23

THM16 : Cas de $\int$ généralisée ← le mettre juste en rem : comme dans [BRI] !

Ex17 : $x \mapsto \frac{1}{\dots}$ … $\in \mathcal{L}^1([\dots])$

II) Principaux théorèmes :

A) Convergence dominée :

[BRI] p. 133 – 140

THM18 : Lemme de Fatou

Ex19 : f ↗ sur $[0;1]$ continue en 0, 1 et dérivable λ-p.p. Alors $\int_0^1 f' \leq f(1) - f(0)$

THM20 : CV dominée

Ex21 • $\int_0^1 \min\left(\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}, n\right) dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
• f dérivable p.p. sur $[0,1]$ de dérivée bornée, $\int_0^1 f' = f(1) - f(0)$

THM21 échange $\int - \sum$ ⁝ se déduit du thm de CV dominée

B) Applications aux intégrales à paramètres

[BRI] [QUÉ]

THM22 : Continuité sous l' $\int$

THM23 : dérivabilité sous l' $\int$

Rem24 : • thm de caractère $\mathcal{C}^1$ et par récurrence du caractère $\mathcal{C}^k$
+ aussi thm d'holomorphie ← aller voir la preuve de Noble ↑ elle utilise VRM Morera ? oui !

[BRI] [LI int]

(Applis : $A = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ via une éq diff.)

Ex25 : fct Γ $\mathcal{C}^\infty$, holom + formule d'Euler-Gauss.

III) Les espaces L^p : $p \in [1; +\infty]$

A) Définitions - 1ers résultats : $(X, \mathcal{F}, \mu)$ esp. mes

[LI int] p. 206 – 211

Déf26 : $\underbrace{L^p(X, \mathcal{F}, \mu)}_{\text{…}}$ + $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ + déf $\underline{\underline{L^\infty}}$

THM27 : • Hölder + Minkowski

Cor28 : $\|\cdot\|_p$ norme sur L^p ; L^p e.v.

+ rajouter prop29 : si $f_n \xrightarrow{L^p} f$, $(f_n)_n$ admet une ss-suite CV μ-p.p.

[RUD]

THM29 : Riesz-Fischer (Dev 1)

[LI int]

Ex30 : $\ell^p(\mathbb{N})$, $L^p(\mathbb{R}, \lambda)$; "$L^p(\mathbb{R}, \lambda_p)$" ← intégration muni d'un poids

Prop31 : Si $\mu(X) < +\infty$, $\forall$ $1 \leq p < q < +\infty$, $L^\infty(\mu) \subseteq L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ (écrire mieux)

Rem32 : • C'est le cas pour les espaces probabilisés ou pour $L^p(\mathbb{T})$ apparaissant en Σ de F.
• Pour $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ c'est pas vrai : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1[} \in L^1 \setminus L^2$, $x \mapsto \frac{1}{x} \mathbb{1}_{]1,+\infty[} \in L^2 \setminus L^1$

Prop32' : pour $p = 2$, $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace de Hilbert muni du p.s.
$\langle f, g \rangle := \int_X f(t) \overline{g(t)} \, d\mu(t)$.

ou tout [BRI]

Premiers [204] suite

III) B) Résultats de densité :

ici sur espace mesuré quelconque

THM33 : • $\forall p \in [1, +\infty[$ l'ens. de fct ~~en esc~~ étagées intégrables est dense dans L^p
$p = +\infty$, l'ens. des fct étagées est dense dans L^∞

[BRI] p 170 – 178

THM34 : • $\forall p \in [1; +\infty[$, l'ens. des fct en escaliers à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$
$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

Rem35 : La densité des fct en escalier s'étend sur $\mathbb{R}^d$ en adaptant la déf de fct en esc.

Rem36 : Pour prouver certains résultats il est parfois plus facile de prouver sur un sous-espace dense et de l'étendre par densité.
Ex : certains raisonnements en An. de F. ⤳ Riemann-Lebesgue sur Σ de F)

bon on peut réduire les remarques

Rem37 : Dans le cas particulier du Hilbert L^2 on peut obtenir des bases hilbertiennes :

Ex38 : • densité polyn ⊥ ← base hilbertienne sur $L^2_\rho(I, \rho)$ ← BEC
• $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ base hilbertienne de $L^2_{2\pi}\left([0, 2\pi], \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ ← un peu partout

c'est [BRI] qui me fait penser à L^2

IV) Applications :

A) Convolution et approximation de l'unité :

[EP Am F]

Rem39 : Fub-Ton ← [BRI]

Déf39 : fct convolables, $*$
Prop40 : $\mathrm{supp}(f * g) \subseteq \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$ ← à mettre ? ← je pense enlever

THM41 : $f, g \in L^1 \Rightarrow f * g \in L^1$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
$(L^1, +, \cdot, *)$ est une algèbre de Banach.

THM42 : • Inégalité d'Young + convolut° L^p / L^q …

Déf43 : Approx. de l'unité

[BRI]

Ex44 : construction + exemples : noyaux de Gauss / de Cauchy

Prop44 : $(\varphi_j)_j$ approx de l'unité, $\forall f \in L^p$, $p < +\infty$, $f * \varphi_j \xrightarrow{L^p} f$ ← Preuve [BRI] mieux $\forall f \in [0; p]$

THM45 : $f \in C^p$, $g \in L^1_{loc}$ ou $f \in \mathcal{C}^p_c$ et $g \in L^1 \Rightarrow f * g \in \mathcal{C}^p$ et $(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g$

Déf46 : suite régularisante.

Ex47 : on peut en construire une grâce à $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{1 - |x|^2}\right) \mathbb{1}_{|x| < 1} \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$

Rem48 : comme dans la rem44. + en particulier, suite rég = approx. de l'unité

Prop49 : $\forall p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dense dans $L^p(\mathbb{R})$ + rem : valable aussi sur $\mathbb{R}^d$.

B) Application à l'analyse de Fourier :

[EP Am F]

Déf50 : $\hat{f}$

Prop51 : Riemann-Lebesgue

THM52 : $\mathcal{F} : \left| \begin{array}{l} L^1 \longrightarrow \mathcal{C}_0 \\ f \longmapsto \hat{f} \end{array} \right.$ est linéaire continue

$\gamma_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{t^2}{2s}}$, $s > 0$

Ex53 : $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2} e^{-|t|}\right)(x) = \frac{1}{1 + x^2}$; $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1, 1]})(x) = 2 \,\mathrm{sinc}(x)$; $\hat{\gamma}_s = \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \gamma_{s^{-1}}$, $t \mapsto e^{-\frac{st^2}{2}}$

Prop54 : $\mathcal{F}(\bar{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}_{\sigma}$ (cf déf) ; $\mathcal{F}(f(\lambda t))(x) = \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{F}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, $\mathcal{F}(\tau_a f)(x) = e^{-iax} \hat{f}(x)$
• $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$
$\mathcal{F}(e^{ia \cdot} f)(x) = \tau_a \hat{f}(x)$

THM55 : formule de dualité
THM56 : formule d'inversion

→ besoin pour dév
(si on change de dév, réduire cette partie)

Csq57 : $\mathcal{F}$ injective

Rem58 : $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ donc à priori $\mathcal{F}$ non déf. sur L^2, mais on peut l'étendre :

THM59 : Fourier-Plancherel, déf $\mathcal{F}_2 : L^2 \to L^2$ isométrie 2π.
+ $\overline{\mathcal{F}(L_1 \cap L_2)}^{L^2} = L^2$ donc $\mathcal{F}_2$ ~~est~~ surjective

Dév 2

Applic60 : calcul de $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 t}{t^2}$ et $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 t}{t^4} \, dt$ …

Réf :

• [BRI] – Briane-Pagès. Théorie de l'intégration
• [LI-int] – D. Li. Intégration et applications
• [EP Am-F] EP Amrani. Analyse de Fourier.

([RUD] ← dév 1 …) ~~([QUE] pour III…)~~

[QUE] pour III) B) ← peut être remplacer par BRI (sûrement LI aussi)
mais j'aime bien parce qu'il y a Π qui suit