[230] : $\Sigma$ de nbre réels / cplex

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

# I) Convergence de séries numériques :

## A) Séries convergentes et restes :

[El Am] p. 79 – 83

Déf$_1$ : $S_n$, $\Sigma u_n$

Déf$_2$ : Série CV + déf $R_n$

Ex$_3$ : $\Sigma$ géom

Prop$_4$ : nature de $\Sigma u_n$ ne dépend pas d'un nbre fini de termes.

Prop$_5$ : $\Sigma u_n$ CV $\Rightarrow u_n \to 0$

Rem$_6$ : ⚠ ex $\Sigma \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ DV + déf DV grossièrement

Déf$_7$ : $\Sigma$ télescopique

Prop$_8$ : $\Sigma u_n$ série télesc associée à la suite $(a_n)_n$. $(a_n)_n$ et $\Sigma u_n$ sont de m̂ nature

Ex$_9$ : $\Sigma \frac{1}{n(n+1)}$

~~Déf$_{10}$ : $\Sigma$ abs CV~~

Prop$_{10}$ : Si $\Sigma u_n$, $\Sigma v_n$ 2 $\Sigma$ CV, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\Sigma(u_n + \lambda v_n)$ CV et $\sum_{n=c}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \Sigma u_n + \lambda \Sigma v_n \ldots$

Rem$_{11}$ : L'ensemble des séries numérique CV est un $\mathbb{K}$-ev.
- Si $\Sigma u_n$ CV, $\Sigma v_n$ D $\Sigma(u_n+v_n)$ DV, si les 2 DV on peut rien dire

## B) Critère de Cauchy et convergence absolue

[El Am] p. 83 – 85

Thm$_{12}$ : $\Sigma$ CV $\Leftrightarrow$ elle vérifie le CC.

Ex$_{13}$ : $\Sigma$ harmon DV

Déf$_{14}$ : $\Sigma$ abs CV

Thm$_{15}$ : Abs CV $\Rightarrow$ CV

Rem$_{16}$ : ⚠ ex $u_{2p} = -\frac{1}{p}$, $u_{2p-1} = \frac{1}{p}$

[Gou] p. 216

Déf$_{17}$ : $\Sigma$ commutativem$^t$ CV

THM$_{18}$ : Abs CV $\Rightarrow$ commutativem$^t$ CV et $\sum_{n=c}^{+\infty} u_n = \sum_{n=c}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ $\forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bij

## C) Produit de Cauchy

[El Am] p. 101 – 103

Déf$_{19}$ : $\Sigma u_n$, $\Sigma v_n$ 2 séries, série produit $\Sigma w_n$ où $w_n = \sum_{k=c}^{n} u_k v_{n-k}$

THM$_{20}$ : Si $\Sigma u_n$, $\Sigma v_n$ sont abs CV, $\Sigma w_n$ aussi et $\sum_{n=c}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=c}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=c}^{+\infty} v_n\right)$

THM$_{21}$ (Mertens) si l'une des 2 CV abs et l'autre CV alors leur produit CV et ✓

Appli$_{22}$ : $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$

# II) Critères de convergence et comportement asymptotique :

## A) Cas des séries à termes positifs. $\Sigma u_n$ $\geq 0$

[El Am] p. 86 – 89

Rem$_{23}$ : Résultats valables pr $\Sigma$ à terme $\leq 0$. en adaptant...

THM$_{24}$ : $u_n \leq v_n$ $\to$ $\Sigma v_n$ CV $\Rightarrow \Sigma u_n$ CV et $\sum^{+\infty} u_n \leq \sum^{+\infty} v_n$ ; $\to$ $\Sigma u_n$ DV $\Rightarrow \Sigma v_n$ DV

Ex$_{25}$ : $\Sigma 1/n^2$ CV $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$

THM$_{25}$ : Règle d'$\sim$ ; Règle de dominat$^\circ$ ~~et~~ $+ o$ ] avec $S_n$ / $R_n$ aussi !

Appli$_{26}$ : $\Sigma 1/n^\alpha$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Rem$_{27}$ : ces thm permettent également l'étude de comp. asympt. de suites :

Appli$_{28}$ : Étude du sinus itéré (Dév 1)

[Gou] p. 228 – 229

Rem$_{29}$ : Méthode valable pour $(u_n)_n$ lq $u_n \to 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x - Ax^\alpha + o(x^\alpha)$, $A>0$, $\alpha>1$ $\rightsquigarrow$ on calcule un $\sim$ de $u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$ en $+\infty$.

THM$_{30}$ : Comparaison $\Sigma - \int$ ] mettre le thm d'[El Am]

[El Am] p. 92

Appli$_{31}$ : $\Sigma$ de Bertrand

[FRA An 1] ou [Gou] p. 211

Appli$_{32}$ : Dév asympt. de $\Sigma$ harmonique — Abaisser !

Rem$_{33}$ : ↗ méthode gén. pour obtenir un dév asympt d'une $\Sigma$

chercher réf [FRA An 1] ?

230 Suite

[El. Am) p. 107-109

II) B) Séries quelconques :

Thm34 : Règle de Cauchy-Hadamard + rem : $\boxed{\text{majorat}^\circ \text{ de } |R_n|}$

Ex35 : $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

THM36 : Règle de D'Alembert (avec lim et $\overline{\lim}/\underline{\lim}$) + $\boxed{\text{majorat}^\circ \text{ de } |R_n|}$

THM37 : CSSA + $\boxed{\text{rem : la majorat}^\circ \text{ de } |R_n| \text{ permet d'avoir une précision sur l'erreur commise en approximant } S \text{ par } S_n}$

Ex38 : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $\alpha>0$

Rem39 : la ↓ de $(a_n)_n$ est ⚠ ex $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $\sum (-1)^n a_n$ DV

THM40 : Critère d'Abel

Rem41 : Généralisat° du CSSA

Ex42 : $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \downarrow$ vers 0, $\forall \theta \neq 0 (2\pi)$, $\sum a_n \cos(n\theta)$, $\sum a_n \sin(n\theta)$ CV

III) Utilisation de fonctions pour étudier des séries numériques :

A) Séries entières : On note $(a_n)_n \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n z^n$ la série entière associée

Déf43 : Rayon de CV R

Lemme44 : Abel

Rem45 : Les règles de Cauchy-Had et de D'Alembert sont un moyen pratique de calculer R

Prop46 : • $\sum a_n z^n$ CV normalement sur tout compact $\subset D(0,R)$

• On ne peut pas dire à priori si elle CV sur $\mathcal{C}(0,R)$ ou non

~~Déf47 : fct dév. en~~ Rem47 : Permet d'obtenir des prop de continuité, dérivabilité de S sur D(0,R)

Déf47 : Fct dév. en Σ ent (en 0)

Ex48 : Les polyn.

Prop49 : si f dév en Σ ent en $x_0$ ⇒ elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $V(x_0)$ et $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Prop50 : f dév en Σ ent en 0 ⟺ ∃ I ouvert contenant 0 sur lequel $R_n \xrightarrow{s} 0$ ⚠

Ex51 : Fct dév en Σ ent : $\frac{1}{1+x}$, $e^x$

[El Am] p. 246-250

Rem52 : Grâce à la régularité (dérivation / intégrat°) des Σ ent, on en déduit des dév. en Σ ent. classiques :

Ex53 : $\ln(1+x)$ ; $\arctan(x)$, dérivée de $\frac{1}{1-x}$ ...

Rem53 : Un énoncé qui résout le Pb de CV au bord du disque :

[BEC] + [GOU] p. 93-100

THM54 : Abel angulaire — Dév 2

Appli55 : $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

[HAU] ⚠

Rem55 : Ce thm permet donner une nouvelle définition de CV de séries : La CV au sens d'Abel : $\sum u_n$ CV au sens d'Abel lorsque le rayon de CV de $\sum u_n x^n$ est ≥ 1 et si sa fct somme admet une limite finie lorsque $x \to 1$.

B) Séries de Fourier : Soit $f \in L^1_{2\pi}$ (ie $2\pi$-périodique et intégrable sur $[0;2\pi]$ avec la mesure $\frac{dx}{2\pi}$)

[BEC] p. 122-131

Déf56 : $c_n(f)$ ; $\boxed{a_n(f), b_n(f)}$ ← aller voir [GOU]

$S_n(f)$ + Σ de Fourier (formelle)

Rem57 : • Si $f \in L^2_{2\pi}$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$ où $e_n : t \mapsto e^{int}$

• $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ orthonormale ~~pour le p.s. $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$~~

↳ elle est m̂ totale via le thm de Fejér. En voici une csq :

THM58 : $\forall f \in L^2_{2\pi}$, $f \overset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$ i.e $\|S_N(f) - f\|_2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

THM59 : Égalité de Perseval

Appli60 : $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

[El Am] p. 230-244

THM61 : Dirichlet (version $\mathcal{C}^1$ par morceaux)

Ex62 : $\frac{\pi - a}{2} = \sum \frac{\sin(na)}{n}$

Prop63 : f $\mathcal{C}^1_{pm}$ ~~et $\sum c_n e_n$ CV normalement~~ et f continue, alors $(S_N(f))_N$ CV normalement vers f

[GOU] p. 274

Ex64 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\cotan(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}$

Réf :

- [El.Am] - El Amrani - Suites et séries numériques, ...
- [GOU] - Gourdon - Analyse
- [BEC] - Beck - Objectif Agrég

(• [HAU] - Hauchecorne pour cv de $\Sigma$ au sens d'Abel)

Dév :
1) Sinus itéré [GOU]
2) Abel - Angulaire [GOU] + [BEC]

Exos sur $\sum$ harmonique : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$.

On cherche un dév. asymptotique de $(H_n)_n$.

* $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ or $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ DV et à termes positifs, donc on a équivalence ~~des~~ sommes partielles :

$H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(n+1)$ D'où $\boxed{H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)}$

* Pour obtenir le 2nd terme du dév. asymptotique, on regarde la suite $(U_n)_n$ définie par $\boxed{U_n := H_n - \ln(n).}$

$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}(-1)^k$

↳ $U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \underbrace{\frac{1}{n} + \left(\frac{-1}{n}\right)}_{=0} - \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= -\frac{1}{2n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $\boxed{U_n - U_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \underbrace{-\frac{1}{2n^2}}_{\leq 0 \text{ signe cst}}}$ or $\sum -\frac{1}{2n^2}$ CV

Donc on a équivalence des restes : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (U_k - U_{k-1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2}$ (*)

~~Restes~~...

↳ on en déduit : $\left(\sum_{k=2}^{n} U_k - U_{k-1}\right)_n = (U_n - U_1)_n$ converge. Donc $(U_n)_n$ converge, on note $\boxed{\gamma = \lim_{n\to+\infty} U_n}$

D'où $H_n = U_n + \ln(n) = \gamma + \ln(n) + \underset{+\infty}{o}(1)$

Puis via (*) on a $\gamma - U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Trouvons un équivalent de $\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/k^2\right)_n$

↳ Via comparaison série-intégrale : $\forall k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$

↳ $\forall n \geq 1$ ~~$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^2}dt \leq \sum_{k=1}$~~ $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/k^2 \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

D'où $\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/k^2 \leq \frac{1}{n}$ donc $\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

D'où $U_n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ Donc $\boxed{H_n = \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$

**Méthode :**
- Vérifier si la $\sum$ CV ou DV
- Trouver un éq des termes gén. puis éq de $R_n$ ou $S_n$
- ~~Terme~~ Regarder $S_{n+1} - S_n$ équivalent ; dc $\sum(S_{n+1} - S_n)$ CV ou DV puis équivalent de somme partielle ou du reste.
- Une fois qu'on a le 1er terme du dév asympt, poser $U_n = H_n - \ldots$ puis recommencer.