Leçon $\boxed{229}$: Fonctions monotones, fonctions convexes. Exemples et applications.

Rapport du jury :

- [ ] Preuve + énoncé : existence limite à g./à d pour fct monotones.
- [ ] Prop. de continuité et dérivabilité à g./à d des fct convexe sur $\mathbb{R}$.
- [ ] Dessin de la not° de convexité
- [ ] Parler de fonction convexe vectorielles
- [ ] Convexité concerne également fct définies sur un convexe de $\mathbb{R}^n$
- [ ] Étude de la fonctionnelle quadratique
- [ ] Minimisation de $\|Ax+b\|^2$ &
- [ ] Dérivabilité λ-pp des fct monotone (preuve éventuellemt admise)
- [ ] E.V. engendré par les fct monotones
- [ ] Dérivat° au sens des distribut°

Réf	Développements
Gruex, soulat fct spéciales; Gourdon p. 315 (3e ed); Queff. Analy agreg p. 312 ... (en partie ?)	Étude de la fct Gamma
proba pour les non probabilistes Appel; Promenade aléat. [BEN] p. 153; Exerc. de proba [COT] Cottrell p. 72	Galton-Watson

Plan idée :

I) Fonctions monotones

A) Déf - 1ère prop

B) Régularité des fct monotones

lim, log

| Ramis - Topologie - Élemt d'analyse

C) Applications

→ Dini + fct à variat° bornées

| Gourdon Analyse

II) Fonctions convexes

A) Fct convexes sur $\mathbb{R}$ | Ramis

B) ―――― sur $\mathbb{R}^n$ | Rombaldi ? Rouvière ?? Hiriart-Urruty Optim. et analyse convexe

III) Applications - Exemples

A) ~~Convexité~~ : inégalités et log-convexité - Exemples

Hölder / Minkowski log convexité

+ minimum de fct cvx

↳ $\boxed{\text{étude de Gamma}}$ Dév 1 | [GOU] [QUÉ]

→ Beck ? ~~Gourdon~~ ? Rombaldi ? Rudin ? Queffelec ?

B) Applications en proba

→ ~~exemple fct rép. (pour monotonie)~~

→ ~~simulat° par la méthode inversion (monotonie)~~

→ $\boxed{\text{Méthode de Galton-Watson}}$ Dév 2

à chercher...

Foata-Fuschs ?

Cottrell ? + Delmas

C) Méthode de Newton

| Rouvière

Plan détaillé $\boxed{229}$ Fct monotones/convexes

I) Fonctions monotones :

A) Déf et 1ère prop :

DÉF$_1$: · fct ↗ / strict ↗
· fct ↘ / —— ↘
· fct monotone / strictement monotone

Ex$_2$: exemples

PROP$_3$: · f croissante, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda f \notin$ croissante
· f, g ↗, $f+g$ ↗
· f, g ↗, $f, g \geq 0 \Rightarrow f.g$ ↗
· $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les 2 ↗, $f\circ g$ ↗
· —— ↘ ——
· —— f↗, g↘, $f \circ g$ ↘

THM$_4$: Thm de la limite monotone
$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tq $a \in \overline{D \cap]a;+\infty[}$ (ou $\overline{]-\infty;a[\cap D}$).
f admet une limite ($\in \overline{\mathbb{R}}$) en a à droite (ou à gauche) au point a.

Cor$_5$: $f : D \to \mathbb{R}$ ↗, $a \in \overline{D \cap]a;+\infty[}$. f admet une limite finie à droite en a $\Leftrightarrow$ f est minorée sur $D \cap]a;+\infty[$.

B) Régularité des fonctions montones : $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle.

THM$_6$: $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. L'ensemble des points de discontinuité de f est au + dénombrable.

THM$_7$: $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. f continue sur $I \Leftrightarrow f(I)$ intervalle.

THM$_8$: Fct $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable à droite sur $\mathring{I}$
f cste $\Leftrightarrow f'_d = 0$ ......

THM$_9$: Thm de KR des fct strictement monotone

Rem : $t \mapsto t^3$ ↗ strict mais $X \neq \emptyset$

C) Applications :

[GOU] p. 229

Thm$_{10}$: Dini (les 2 énoncés)

[GOU] Pb 13 p. 113 [RAM] p. 118 – 123 ⑥

DÉF$_{11}$: Fonctions à variations bornées

Prop$_{12}$: $\forall f \in \mathcal{C}([a;b])$, f est à variat° bornée et $\sup_{\sigma \in Sub[a;b]} Var_\sigma(f) = \int_a^b |f'|(t)dt$

THM$_{13}$: $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. f à variat° bornée $\Leftrightarrow \exists g, h : [a;b] \to \mathbb{R}$ ↗ tq $f = g - h$.

Ex$_{14}$: $x \mapsto \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue mais non à variat° bornée

II) Fonctions convexes :

ou [REM]

~~Fct cvx sur R~~ E ev de dim finie

[BEC] p. 27

DÉF$_{15}$: · fct cvx ~~sur~~ de $E \to \mathbb{R}$, $C \subseteq E$ convexe
· fct strictement cvx
· fct concave

THM$_{16}$: $f : C \to \mathbb{R}$ convexe $\Leftrightarrow \{(x,y) \in C \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}$ est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$

~~Exp~~ Ex$_{16'}$: Toute fct linéaire est convexe

A) Fonctions convexe sur R : $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle

[RAM] p. 134

THM$_{17}$: $f : I \to \mathbb{R}$ convexe $\Leftrightarrow \forall (x,y,z) \in I^3$, $x<y<z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{z\ \ x}{\dots} \leq \frac{z\ \ y}{\dots}$
$\Leftrightarrow \forall a \in I$, $\tau_a : t \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ ↗.

Rem : f cvx $\Leftrightarrow \mathcal{C}_f$ au dessous de ses cordes [Fig 1]

[RAM] p. 135

Prop$_{18}$: $f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$, $\forall (\alpha_i)_{i=1}^n$ tq $\sum \alpha_i = 1$. ...

[RUD] p. 78

Prop$_{19}$: ≠ Jensen ⚠ marche que sur un espace probabilisé

peut-être mettre en III

[RAM] p. 136

THM$_{20}$: $f : I \to \mathbb{R}$ convexe
Alors f admet une dérivé à g. et à d. en tout pt de $\mathring{I}$ et · $f'_g \leq f'_d$ sur $\mathring{I}$
· f continue sur $\mathring{I}$
$\forall a, b \in \mathring{I}$, $a < b \Rightarrow f'_d(a) \leq \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq f'_g(b)$ · f'_g, f'_d ↗

THM$_{21}$: $f : I \to \mathbb{R}$ ~~dérivable~~, I ouvert.
f convexe $\Leftrightarrow$ f continue et admet une dérivée à droite ↗ sur I

Cor$_{22}$: $f : I \to \mathbb{R}$ 2 fois dérivable sur I ouvert
f convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ sur I

Rem$_{23}$: Pour f dérivable, f cvx $\Leftrightarrow \mathcal{C}_f$ au dessus de toutes les tangentes de f [Fig 2]

Ex$_{24}$: $t \mapsto t^2$, exp cvx, ln concave

Plan détaillé $\boxed{229}$

II) B) Fonctions convexes sur un espace vect. de dim $n<+\infty$:

E ev de dim $n<+\infty$, $C\subseteq E$ convexe

[RAM] P. 343

...op$_{25}$: f convexe $\Leftrightarrow \forall x,y\in C$, $\varphi_{(x,y)} : \begin{vmatrix} [0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(tx+(1-t)y) \end{vmatrix}$ est convexe

THM$_{26}$: $f : U\to\mathbb{R}$, U ouvert cvx, f différentiable sur U
f cvx $\Leftrightarrow \forall (a,x)\in U^2$, $f(x)\geq f(a)+df(a).(x-a)$ (11)

THM$_{27}$: $f : U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, U ouvert cvx, 2 fois diff.
f cvx $\Leftrightarrow$ $h\mapsto d^2f(a).(h,h)$ est positif, $\forall$ ~~...~~ $a\in U$ (12)

[BEC] P. 28

Prop$_{28}$: $C\subseteq E$ cvx, $(f_j)_{j\in J}$ fct cvx sur C. Si $\exists g : C\to\mathbb{R}$ tq $\forall j$, $f_j\leq g$ sur C
$\hookrightarrow \sup\limits_j f_j$ cvx

Appli$_{29}$: Pour $A\in S_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_{max}(A)=\max(Sp(A))$ (13)
$f : \begin{vmatrix} S_n \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \longmapsto \lambda_{max}(A) \end{vmatrix}$ est cvx

III) Applications - Exemples :

A) Inégalités classiques - Exemples :

* Inégalités

[RUD] P. 78-79

...ROP$_{30}$: exp, ln étant respectivement convexe et concave, on a l'inégalité classique : $\begin{cases} \forall x>-1, & \ln(1+x)\leq x \\ \forall x\in\mathbb{R}, & x\leq e^x-1 \end{cases}$

...HM$_{31}$: $\neq$ Jensen

...ppli$_{32}$: $\forall x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(x_1\dots x_n)^{1/n}\leq\frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)$ (14)

...ppli$_{33}$: $\neq$ de Hölder sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$
$\neq$ de Minkowski
$\Rightarrow (L^p,\|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé (15)

* Recherche de minimum

[ROM] P. 284

THM$_{34}$: $f : I\to\mathbb{R}$ CVX, I int. de $\mathbb{R}$, si f dérivable en $\alpha\in\mathring{I}$ et $f'(\alpha)=0$, alors f admet un min global en α (16)

THM$_{35}$: $f : I\to\mathbb{R}$ CVX, admettant un min local en $\alpha\in I$, ce minimum est en fait global

Dév 1

[GOU] p 290 + [QUE]

* Etude de la fonction Γ :

THM$_{36}$: On définit : $\forall x>0$, $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, Alors
1) Γ bien définie
2) Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3) Γ et $\ln\Gamma$ sont convexes
4) $\forall x>0$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1)=n!$, $\Gamma(x)\underset{0^+}{\sim}1/x$

B) Une application de la monotonie et de la convexité en Probabilité :

[DEL] ≃ p. 90 + [COT] p. ?

Processus de Galton Watson :

Rem$_{36}$: Ce processus permet d'étudier la transmission d'un nom de famille (ou d'une maladie).

• Soit $(X_i^n)_{i\geq1,n\geq0}$ suite de v.a iid de carré intégrable, à valeurs dans $\mathbb{N}$
On note G leur fonction génératrice commune, et m leur espérance
$p_k=\mathbb{P}(X_i^n=k)$
• On pose $Z_0=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $Z_{n+1}=\sum\limits_{i=1}^{Z_n}X_i^n$ (avec $\sum\limits_{i=1}^{0}\dots=0$: $Z_n=0\Rightarrow Z_{n+1}=0$)
• On note $r_0=\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}[Z_n=0]\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Z_n=0)$. (Proba d'extinction)

Lemme$_{37}$: On note G_n la fonction génératrice de Z_n : $\forall s\in[0;1]$, $G_n(s)=\mathbb{E}[s^{Z_n}]$
$\hookrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*$, $G_n(s)=G_{n-1}(G(s))=\underbrace{G\circ\dots\circ G}_{n\text{ fois}}(s)$.

$(\mathbb{E}[Z_n]=m^n)$ On se place dans le cas $\boxed{p_0\in\,]0;1[}$

Dév 2

Lemme$_{38}$: • $G : [0;1]\to\mathbb{R}$ est bien définie, $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;1[$
• G est strictement croissante sur $[0;1]$
• G est convexe ~~sur~~ et G strictement convexe sur $]0;1[$ $\Leftrightarrow p_0+p_1<1$

THM$_{39}$: • $r_0\in[0;1]$ est le plus petit point fixe de G dans $]0;1]$
• Si $m\leq1$, $r_0=1$
• Si $m>1$, $r_0\in\,]0;1[$

C) Méthode de Newton

[ROU]

$\rightarrow$ Si VRM il reste des tps et de la place : mettre la méthode de Newton avec schéma

Réf :

[RAM] : Ramis, Deschamps, Odoux, Cours de mathématiques spéciales - topologie tome 3 I AB + III AB

II

I C [GOU] : Gourdon - Analyse + III A

II AB [BEC] : Beck, Objectif Agrég

III A [RUD] : Rudin, Analyse réelle et complexe

III A + II AB [ROM] : Rombaldi, Éléments d'analyse réelle

[QUÉ] : Queffélec - Analyse agrég ← dév Π (avec [GOU])

[DEL] Delmas - Modèles aléatoires

[COT] · Cottrell · Exos de probas

← dév Galton Wat

([ROU] - Rouvière) ← méthode New

$\lambda_{max}^{(A)} = \sup_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle$?

$\exists (e_i)_{i=1}^n$ B.O.N. de vecteur propres de A ($\lambda_i \in \mathbb{R}$)

on considère $\lambda_{max}(A) = \lambda_1$

$\lambda_{max}(A) = \langle e_1, Ae_1 \rangle = \lambda_1$ avec $\|e_1\| = 1$

Reste à mq $\forall x \in \mathbb{R}^n$, tq $\|x\| = 1$, $\langle x, Ax \rangle \leqslant \lambda_{max}(A)$

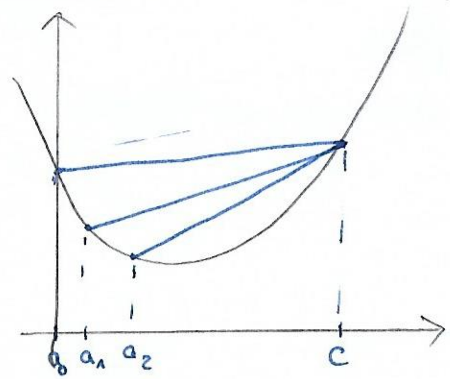
$x = \sum x_i e_i$

$\langle x, Ax \rangle = \langle \sum x_i e_i, \sum x_j \lambda_j e_j \rangle$

$= \sum_{i=1}^n x_i^2 \underbrace{\lambda_i}_{\leqslant \lambda_1} \leqslant \lambda_1 \underbrace{\sum x_i^2}_{= \|x\| = 1} \leqslant \lambda_1$

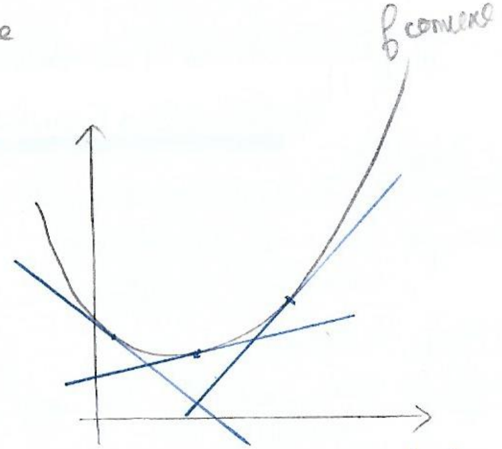
OK

Annexe :



$f_{|[a;c]}$ est au dessous de ses cordes

Figure 1



f au dessus de toutes ses tangentes

Figure 2