Plan $\boxed{228}$ (Continuité, dérivabilité de fct réelles de variable réelle)

I) Continuité et dérivabilité

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$

A) Continuité

[ROM] p. 163 – 166

Déf 1 : continuité à g. / à d.

THM 2 : f continue en $\alpha \Rightarrow f$ bornée au $\mathcal{V}(\alpha)$

THM 3 : f continue en $\alpha \in \mathring{I} \Leftrightarrow$ continue à g. et à d.

Ex 4 : fct cste, polynôme

THM 5 : caractérisat° séq. de la continuité.

THM 6 : ―――――― avec image récip. d'un ouvert/fermé

Rem 7 : KR séq utilisée pour montrer la discontinuité

Ex 8 : $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ disc. en 0, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

Applig : limite de $u_{n+1} = f(u_n)$ = pt fixe de f

[ROM] p. 166 – 168

THM 10 : Prolongement par continuité

Prop 11 : opérat° + composit° de fct continues

[ROM] 15 - 16

Déf 12 : uniforme continuité ①

THM 13 : Heine

Rem 13' : $x \mapsto x^2$ continue non unif. cont. sur $\mathbb{R}$ ②

THM 14 : fonction continue sur un compact / segment est bornée et atteint ses bornes ③

[GOU] p 225

THM 15 : Weierstrass ④

B) Dérivabilité

[ROM] p. 197 – 200 – 201

Déf 16 : f déri en $\alpha \in I$ + dérivable à g. / à d.

Rem 17 : déf $\Leftrightarrow f$ dériv en α ssi elle admet un DL à l'ordre 1 en α

THM 18 : dériv en $\alpha \Rightarrow$ continue en α

Rem 19 : récip fausse. $x \mapsto |x|$ en 0

THM 20 : f dériv. en $\alpha \in \mathring{I} \Leftrightarrow$ dériv. à g / à d et $f_g'(\alpha) = f_d'(\alpha)$

Rem 21 : une fonct° peut être continue et nulle part dérivable (cf III)
une construct° possible : φ 2 périodique tq $\varphi(x) = |x|$ pour $x \in [-1;1]$
$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ ou fct de Weierstrass ⑤

Déf 22 : classe $\mathcal{C}^1$

Rem 23 : • on définit par réc classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$
• une fonction dérivable n'est pas forcément $\mathcal{C}^1$: $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

[ROM] p. 202 – 204

THM 24 : opération sur fct dérivables + formule Leibniz (2) + composit°

THM 25 : Thm de dérivée de la réciproque

Ex 26 : arccos', arctan'

[ROM] 205 – 207

THM 27 : $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dériv sur $\mathring{I}$, $\nearrow$ sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathring{I}$
$\searrow$: $f'(x) \leq 0$
cste : $f'(x) = 0$ ⑥

Rem 28 : stricte $\nearrow$

II) Théorèmes principaux :

A) Théorème des valeurs intermédiaires :

[ROM] p. 174 ou [GOU] p. 41

THM 29 : T.V.I. ← 2 démos sur [ROM] ⑦

[ROM] p. 174

Rem 30 : • Si f strictement monotone, unicité car bijective
• Réciproque fausse, comme le montre le thm suivant

[ROM] p. 211

THM 31 : Darboux : f dérivable sur I, f' vérifie la prop. des v. I. ⑧

[ROM] p. 175

(THM 32 : si f vérifie la prop des TVI, elle est continue $\Leftrightarrow \forall y \in f^{-1}\{y\}$ fermé de I)

THM 33 : Si f monotone tq $f(I)$ intervalle, alors f continue ⑨

Ex 34 : $f : [0;1] \to [0;1]$ continue admet un pt fixe.

B) Théorème de Rolle et conséquences :

[GOU] p. 74

Prop 35 : f admet un extremum relatif en $\alpha \in \mathring{I} \Rightarrow f'(c) = 0$ ⑩
$f'(c)$ existe

[ROM] p. 252

THM 36 : Thm de Rolle ⑪

Rem 37 : Par unicité de c
• Hyp. de continuité au bord essentielle : $f(x) = \begin{cases} x \text{ sur }]0;1] \\ 1 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$

[GOU] p. 74

THM 37 : TAF ⑫

Rem 38 : Rolle + TAF non vrai sur $\mathbb{C}$ ou f à valeurs sur un $\mathbb{R}$-ev quelconque : $t \mapsto e^{it}$

[ROM] p. 262

Appli 39 : Thm de prolongement de dérivabilité ⑬

C) Formules de Taylor :

[ROM] p. 285 – 287

THM 40 : Formule de Taylor-Lagrange

THM 41 : ―――――― - R. I.

[ROM] p. 309

THM 42 : ―――――― - Young ⑭

(Appli 44 : Méthode de Newton [ROU])

[GOU] p. 77

Appli 43 : $\forall x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ ⑮

[illegible] [ROM] p. 293

Plan $\boxed{228}$ (suite)

III) Étude de certaines classe de fonctions :

A) Fonctions monotones et convexes : $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle

Prop45 : $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. L'ensemble des points de discontinuité est dénombrable (16) [ROM] p.163 164

Ex46 : $f : x \mapsto \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)$

Prop46 : $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement monotone $\Rightarrow f(I)$ intervalle de $\hat{m}$ nature que I, $f : I \to f(I)$ bijectio avec f^{-1} continue strict monotone de $\hat{m}$ sens que f [ROM] p.176 177

Rem47 : C'est comme ça qu'on construit arccos / arcsin / arctan / $\ln$

Sans strict monotonie $f(I)$ pas forcément de $\hat{m}$ nature que $f : x \mapsto |x|$ sur $]-1;1[$

THM48 (admis) : une fonction monotone est dérivable p.p.

Prop49 : f convexe sur $I \Rightarrow f$ continue sur $\mathring{I}$ (17) [ROM] p.231 238

THM50 : f cvx sur $I \Rightarrow$ elle admet des dérivées à g. et à d. sur $\mathring{I}$ et

$$f_g'(a) \leq f_d'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f_g'(b) \leq f_d'(b)$$

(18)

THM51 : $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. f cvx sur I (strict) $\iff f'$ $\nearrow$ sur I (strict)

Prop52 : f cvx sur I, dériv en $\alpha \in \mathring{I}$; $f'(\alpha) = 0 \Rightarrow f$ admet un min. global en α (19) [ROM] p.234

B) Suite de fonctions :

Prop53 : CV unif préserve continuité [GOU] p.233 234

THM54 : $(f_n)_n$ $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, $\exists x_0 \in [a;b]$ tq $f_n(x_0)$ CV, $f_n' \xrightarrow{u} g$

Alors $\exists f \in \mathcal{C}^1$ tq $f' = g$ et $f_n \xrightarrow{u} f$. [GOU] p.239

THM55 : Dini (2 versions)

Rem56 : $f_n' \xrightarrow{u} g$ $\triangle$ ex $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ / $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{u} |x|$ [HAU] p.240 242

THM57 : Densité fct cont. nulle part dérivable dans $(\mathcal{C}^0([0;1]), \|\cdot\|_\infty)$ Dév1 [QUÉ]

C) Intégrales à paramètre : $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espace mesuré

$f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$

On pose : $\forall t \in X$, $F(t) = \int_\Omega f(t,x)\, d\mu(x)$. [QUÉ] p.306 307

THM58 : Continuité sous $\int$

THM59 : dérivatio sous $\int$

Rem60 : dominatio $\triangle$ ex : $f(t,x) = x e^{-xt}$ (continue en x, $\forall t$), F non continue en 0 [HAU] p.224 226

- $f(x,t) = x^2 e^{-t|x|}$ $\mathcal{C}^1$ en x, $\forall t$, $F(x) = |x|$

Applic61 : Étude de la fonction $\Gamma : \forall x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ Dév2 [QUÉ] + [GOU]

1) Γ bien définie
2) Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*_+$
3) Γ est strictement convexe sur $\mathbb{R}^*_+$ [QUÉ]
4) ~~Fo~~ $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} 1/x$
5) Tableau de variations de Γ. [GOU]

Réf :

[ROM] - Rombaldi - Analyse

[GOU] - Gourdon - Analyse

[QUÉ] - Zuily-Queffélec, Analyse pour l'agrég

[HAU] - Hauchecorne