

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations

On note  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur le corps  $\mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$

## I) Définitions et premières propriétés:

### A) Dépendance vis-à-vis de $f$ :

DEF<sub>1</sub>: Soit  $R \in \mathbb{N}^*$ . Une suite  $(u_n)_n$  à valeurs dans  $E$  est dite récurrence d'ordre  $R$  lorsque:  $\forall n \geq R, u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-R})$ , où  $f: E^R \rightarrow E$

• Continuité de  $f$ : On suppose  $f$  continue.

PROP<sub>2</sub>: Soit  $R \in \mathbb{N}^*$ ,  $(u_n)_n$  une suite récurrente d'ordre  $R$ , définie par:  $\forall n \geq R, u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-R})$ . Si  $(u_n)_n$  converge vers  $P \in E$ , alors  $P = f(P, \dots, P)$

EX<sub>3</sub>: On définit  $u_0 = 1, u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$ . Si  $(u_n)_n$  converge, sa limite est un point fixe de  $[x \mapsto x^2 - x - 3]$ , donc est  $-1$  ou  $3$ .

• Monotonie de  $f$ : On suppose  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  où  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervalle, avec  $f(I) \subseteq I$ .

PROP<sub>4</sub>: Soit  $(u_n)_n$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n); u_0 \in I$  donné.

• Si  $f$  est croissante sur  $I$ ,  $(u_n)_n$  est monotone de sens donné par le signe de  $u_1 - u_0$ .  
• Si  $f$  est décroissante sur  $I$ ,  $f \circ f$  est croissante, donc  $(u_n)_n$  et  $(u_{n+1})_n$  sont monotones de sens de monotonie opposé.

REM<sub>5</sub>: Les développements limités ou équivalents de  $f$  au voisinage de  $P$  limite de  $(u_n)_n$  peuvent donner des informations sur la vitesse de convergence de  $(u_n)_n$ .

APPL<sub>6</sub>: Étude la suite  $\{u_0 \in ]0, \pi/2]\}$ . On obtient un équivalent et un  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ . De la suite grâce à l'étude de  $\sin$ :

DEF<sub>7</sub>: (Vitesse de convergence). Soit  $(u_n)_n$  suite <sup>réelle</sup> convergeant vers  $0$

\*  $(u_n)_n$  converge géométriquement vers  $0$  lorsqu'elle est dominée par  $(R^n)_n$ , avec  $0 < R < 1$ .

\*  $(u_n)_n$  converge lentement si il existe  $A > 0, \alpha > 0$  telle que  $u_n \leq \frac{A}{n^\alpha}$

\*  $(u_n)_n$  converge (au moins) de manière quadratique lorsqu'elle est dominée par  $(R^{2^n})_n, 0 < R < 1$

\*  $(u_n)_n$  a une convergence d'ordre  $r > 1$  lorsqu'elle est dominée par  $(R^{n^r})_n, 0 < R < 1$

REM<sub>7</sub>: Pour toute suite  $(u_n)_n$  qui tend vers  $0$ , avec  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f(x) = x - Ax^k + o(x^k); (A > 0)$  on obtient un équivalent de  $(u_n)_n$  en calculant un équivalent de  $u_{n+1}^{1/k} - u_n^{1/k}$ ; EX<sub>7</sub>:  $u_0 \in \mathbb{R}^*, u_{n+1} = u_n e^{u_n}$  [EPM] p. 77  $(u_n) \sim \frac{1}{n}$

B) Suites récurrentes classiques: On note  $(u_n)_n$  suite à valeurs dans  $E$  avec  $u_{n+1} = f(u_n)$

→ Suites arithmético-géométriques:

DEF<sub>8</sub>:  $(u_n)_n$  est arithmétique <sup>de raison  $n$</sup>  lorsque  $f$  est de la forme  $f(x) = x + r, r \in E$

$(u_n)_n$  est géométrique <sup>de raison  $q$</sup>  lorsque  $f: x \mapsto qx, q \in \mathbb{K}$

$(u_n)_n$  est arithmético-géométrique lorsque  $f: x \mapsto qx + r, q \in \mathbb{K}, r \in E$ .

PROP<sub>9</sub>: • Si  $(u_n)_n$  arithmétique de raison  $r, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + rn$

• Si  $(u_n)_n$  géométrique de raison  $q, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$

• Si  $(u_n)_n$  est arithmético-géométrique:  $u_{n+1} = qu_n + r$  avec  $q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n + r \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

→ Suites homographiques:

DEF-PROP<sub>10</sub>:  $(u_n)_n$  est dite à récurrence homographique lorsque  $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  est de la forme  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0$  et  $ad-bc \neq 0$ . La suite est définie lorsque  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + d \neq 0$ . On note  $P = cX^2 - (a-d)X - b \in \mathbb{K}[X]$ .

• Si  $P$  a 2 racines distinctes  $\alpha, \beta$ , alors,  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = R^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$  où  $R = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$

• Si  $P$  a une racine double  $\alpha; \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + Rn$ , où  $R = \frac{c}{a - \alpha c}$ .

(\*)

→ Suite récurrente linéaire à coefficients constants:

Soit  $(u_n)_n$  suite complexe récurrente linéaire d'ordre  $R: \forall n \geq R, u_n = \sum_{i=1}^R a_i u_{n-i}; (a_i)_{i=1}^R \in \mathbb{C}$

On pose  $P = X^R - \sum_{i=1}^R a_i X^{R-i}$  le polynôme caractéristique associé à  $(u_n)_n$

Notons  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  ses racines et  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  leur ordre de multiplicité.

Alors l'ensemble des suites vérifiant la relation (\*) (même relation que  $(u_n)_n$ ) est

$\{ \sum_{i=1}^q (P_i(n) \alpha_i^n + \dots + P_i(n) \alpha_i^{n-1}) \mid P_i \text{ polynôme de degré } < \alpha_i \}$

APPL<sub>12</sub>: Si  $\forall n \geq 2, u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ , avec  $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = X^2 - aX - b$

↳ Si  $\Delta_P > 0$ ,  $P$  a 2 racines  $\alpha_1, \alpha_2$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \alpha_1^n + \mu \alpha_2^n$  où  $u_0 = \lambda + \mu, u_1 = \lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2$

• Si  $\Delta_P = 0$ ,  $P$  a 1 racine double  $\alpha, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu) \alpha^n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

• Si  $\Delta_P < 0$ ,  $P$  a 2 racines complexes  $e^{i\theta}, e^{-i\theta}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)), (r, \theta) \in \mathbb{R}^2$

EX<sub>12</sub>: Suite Fibonacci réelle [EPM] p. 47

REM<sub>13</sub>: Toute suite récurrente linéaire d'ordre  $R$  peut être vue comme

une suite vectorielle: si  $\forall n \geq R, u_n = a_1 u_{n-1} + \dots + a_R u_{n-R}$  on pose

$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ \vdots \\ u_{n-R+1} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_1 \\ a_R & a_{R-1} & \dots & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ . Et on a  $X_{n+1} = AX_n$ . Par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$

(\*)

EX<sub>10</sub>:  $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{5u_n + 1}{u_n + 4}, u_0 \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{-2 + 3(\frac{7}{2})^n \times \frac{u_0 + 2}{u_0 - 3}}{1 - (\frac{7}{2})^n \times \frac{u_0 + 2}{u_0 - 3}}$

Par  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \forall n \geq 0$ .

$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} X_n$ . Selon les valeurs de  $(a, b)$  on peut réduire  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$  pour avoir la forme de  $(u_n)_n$  donnée en P2

[EPM]

p. 7

[GOV]

p. 195

[GOV]

GOV/p. 194

DEV 1 [GOV] p. 218

GOV



## II) Points fixes et conséquences

### A) Théorème du point fixe:

**DEF<sub>14</sub>**:  $\varphi: E \rightarrow E$  est dite contractante lorsqu'il existe  $0 \leq k < 1$  tq:  
 $\forall x, y \in E, \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq k \|x - y\|$ .

**REM<sub>15</sub>**: En particulier,  $\varphi$  est continue sur  $E$ .

**THM<sub>16</sub>**: Soit  $\varphi: E \rightarrow E$  contractante, avec  $E$  complet. Alors  $\varphi$  admet un unique point fixe  $a \in E$ . Et  $\forall x_0 \in E$ , la suite  $(x_p)$  définie par  $x_{p+1} = \varphi(x_p)$  converge vers  $a$ .

**REM<sub>17</sub>**: On a une information sur la vitesse de convergence:  $\forall p \in \mathbb{N}, \|x_p - a\| \leq k^p \|x_0 - a\|$ .

• Le théorème reste vrai si on a seulement:  $\varphi$  continue et  $\exists m \in \mathbb{N}, \varphi^m (= \varphi \circ \dots \circ \varphi)$  est contractante.  
 • Toutes les hypothèses du théorème sont importantes.

**Ex<sub>18</sub>**:  $F: x \in ]0, 1[ \mapsto \frac{x}{2}$  est contractante de  $]0, 1[$  dans lui-même, mais sans point fixe ( $]0, 1[$  non complet).

•  $F: x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + 1} \in \mathbb{R}$  est sans point fixe avec  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow |F(x) - F(y)| < |x - y|$ .  
 •  $F: x \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sin(x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$  admet un point fixe unique, or  $F$  non contractante.

**REM<sub>19</sub>**: Ce théorème est très utile pour la résolution d'équations à l'aide d'itérations: Pour résoudre  $f(x) = 0$ ,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable avec  $f(a) < 0 < f(b)$  et  $f' > 0$ . On pose  $\varphi(x) = x - C f(x)$ ,  $C \neq 0$ . Alors  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = x$  et si  $C = \frac{1}{f'(a)}$ ,  $\varphi$  vérifie les hypothèses du THM<sub>16</sub> et la suite  $x_0 \in (a, b), x_{p+1} = \varphi(x_p)$  converge vers  $\frac{1}{f'(a)}$  le 0 de  $f$  sur  $[a, b]$ .

### B) Classification des points fixes: (dans $\mathbb{R}$ )

Soit  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $a \in I$  point fixe de  $F$ . On étudie la suite  $(x_n)$  tq  $x_{n+1} = F(x_n)$ .

**PROP<sub>20</sub>**: \* Si  $|F'(a)| < 1, \exists h > 0$  tq  $J = [a-h, a+h]$  stable par  $F$ , et  $\forall x_0 \in J, (x_n)_n \subseteq J$  et  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ . On a:  $\exists \rho \in ]0, 1[$  tq  $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - a| \leq \rho^n |x_0 - a|$ . On dit que  $a$  est attractif.  
 C'est une convergence géométrique.

\* Si  $F$  est  $\mathcal{C}^2, F'(a) = 0$  avec  $F''(a) \neq 0$ , on a:  $x_0 \in J, x_0 \neq a \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq a$  et  $x_n - a \sim \frac{F''(a)}{2} (x_0 - a)^2$ . On dit que  $a$  est superattractif.  
 C'est une convergence quadratique.

\* Si  $|F'(a)| > 1, \exists h > 0$  tq  $J = [a-h, a+h] \subseteq I, x_0 \neq a \Rightarrow (x_n)_n \not\subseteq J$ , donc la suite n'est éligible de  $a$ . On dit que  $a$  est répulsif.

**REM<sub>21</sub>**: En annexe on peut voir un graphique représentant les cas.

• Le cas  $|F'(a)| = 1$  est particulier: si  $F(x) = 1 - x$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{2n} = x_0$  donc un point fixe peut être ni attractif ni répulsif.

si  $F(x) = \sin(x)$ , la suite  $(x_n)_n$  converge vers le point fixe 0 lentement.

**Ex<sub>22</sub>**: Le nombre d'or  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est l'unique point fixe positif de  $F(x) = 1 + \frac{1}{x}$  et  $|F'(x)| < \frac{1}{2}$  sur  $J = ]\frac{1}{2}, 1+\sqrt{5}[$  donc  $\alpha$  est attractif pour

( $F(x) = \sinh x$ , comme  $\sinh x > x, \forall x > 0$ )  
 le pt fixe 0 est répulsif.

## III) Application à la résolution approchée d'équations du type $f(x) = 0$

### A) Méthode de Newton

Dans  $\mathbb{R}$ : On considère  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  admettant un 0 dans  $[c, d]$ . Pour trouver le point  $a$  tel que  $f(a) = 0$ , l'idée est de partir d'un  $x_0 \in [c, d]$  et approcher  $a$  par le point d'intersection de la tangente de  $f$  en  $x_0$  et de l'axe des abscisses, puis de répéter.

Cela revient à poser  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, x_{n+1} = \varphi(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\varphi(a) = 0$  et  $a$  est un point superattractif de  $\varphi$ .

Voici le théorème estimant l'ordre de convergence de  $(x_n)_n$ :

**THM<sub>23</sub>**:  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{C}^2$  avec  $f(c) < 0 < f(d), f' > 0$  sur  $[c, d], x_{n+1} = \varphi(x_n)$ . Alors:  $f$  admet un unique point fixe dans  $[c, d]$ .  
 \*  $\exists \alpha \in ]0, 1[$  tq  $I = [a-\alpha, a+\alpha]$  soit stable par  $\varphi$ , et telle que

si  $x_0 \in I, (x_n)_n$  converge vers  $a$  de manière quadratique  $\Rightarrow |x_{n+1} - a| \leq k |x_n - a|$ .

• Si de plus,  $f'' > 0$  sur  $[c, d]$  le résultat précédent est valable pour  $I = [a, d]$ ,  $(x_n)_n$  est strictement décroissante et il existe  $C > 0$  tel que  $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$  et  $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$ .

**REM<sub>24</sub>**: Le 1<sup>er</sup> point du théorème est un résultat local, il faut être proche de  $a$  pour s'approcher quadratiquement. Alors que dans le 2<sup>nd</sup> point, on suppose  $f$  convexe, la convergence est alors quadratique si  $x_0 \geq a$ .  
 On retrouve la méthode de la rampe 13.

**Ex<sub>25</sub>**: On peut approcher le nombre d'or, a zéro de  $f(x) = x^2 - x - 1$  en posant  $\varphi(x) = (x^2 + 1)/(2x + 1)$  (cf figure Annexe).

**REM<sub>26</sub>**: La méthode de Newton peut se généraliser dans  $\mathbb{R}^n$ :

Dans  $\mathbb{R}^n$ : On considère  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , a un zéro de  $f$  tel que  $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  est inversible (et même  $df(x)$  inversible sur un voisinage de  $a$ ).  
 (on s'assure que  $f$  est continue de  $\Omega$  en  $a$ ).

**THM<sub>27</sub>** (Newton-Raphson): Dans les conditions précédentes, on pose  $\varphi(x) = x - df(x)^{-1} f(x)$ . Alors  $a$  est un point fixe superattractif de  $\varphi$  ( $d\varphi(a) = 0$ ).  
 Donc  $(x_n)_n$  définie par  $x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - df(x_n)^{-1} f(x_n), \forall n \geq 0$ , converge vers  $a$ .

### B) Méthode de la sécante (dans $\mathbb{R}$ )

Lorsque la dérivée de  $f$  est difficile ou impossible à calculer, on ne peut pas appliquer la méthode de Newton. On peut alors remplacer  $f'$  par un taux d'accroissement de  $f$  sur un petit intervalle. Un inconvénient est lorsque  $x_p$  et  $x_{p-1}$  sont trop proches le calcul de ce taux d'accroissement perd sa précision.



Méthode<sub>28</sub>: Pour  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , admettant un zéro:  $a \in [c, d]$ .  
 Si on dispose de 2 points  $x_0, x_1 \in [c, d]$ , on pose  $T_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ .  
 L'intersection entre la droite  $y=0$  et la sécante traversant  $x_1 - x_0$   
 le graphe de  $f$  aux points  $x_0, x_1$  est  $x = x_1 - \frac{f(x_1)}{T_1}$ .  
 On itère:  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $T_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$  et  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{T_n}$ .  
 La convergence de  $(x_n)_n$  est assurée par le théorème:

THM<sub>29</sub>:  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , tq  $f' \neq 0$  sur un voisinage:  $I = [a-r, a+r]$ .  
 On pose:  $M_1 = \max_{x \in I} |f'(x)|$ ,  $M_2 = \max_{x \in I} |f''(x)|$ ,  $K = \frac{M_2}{2M_1} (1 + \frac{M_1}{m_1})$   
 $m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|$ ,  $M_2 = \max_{x \in I} |f''(x)|$ ,  $R = \min(r, \frac{1}{K})$

Soit  $(z_n)_n$  suite de Fibonacci:  $z_0 = z_1 = 1$   
 $z_{n+1} = z_n + z_{n-1}$

Prop<sub>30</sub>:  $\forall x_0, x_1 \in [a-R, a+R]$ , distincts,  $|x_n - a| \leq \frac{1}{K} (K \max\{|x_0 - a|, |x_1 - a|\})^{\frac{z_n}{z_{n-1}}}$

REM<sub>30</sub>: On peut vérifier que  $z_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$ , donc le nombre de décimale exacte crût environ d'un facteur  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$  à chaque itération.

### C) Méthode pour résolution de systèmes linéaires:

Soit  $ACGL_n(\mathbb{K})$ ,  $b \in \mathbb{K}^n$ , on souhaite résoudre  $AX+b=0$  sans inverser  $A$

METHODE<sub>31</sub>: On écrit  $A = H - N$ ,  $H \in GL_n(\mathbb{K})$  et on pose:  $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ x_{k+1} = H^{-1} N x_k + H^{-1} b \end{cases} \forall k \geq 0$

PROP<sub>32</sub>: Cette méthode converge vers la solution,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  si et seulement si le rayon spectral de  $H^{-1}N$  est  $< 1$  (rayon spectral = max des valeurs propres)

Le choix de  $(H, N)$  définit différentes méthodes, selon la matrice que l'on préfère ou non selon la matrice  $A$ .

Quelq

Voici un tableau représentant des méthodes classiques:

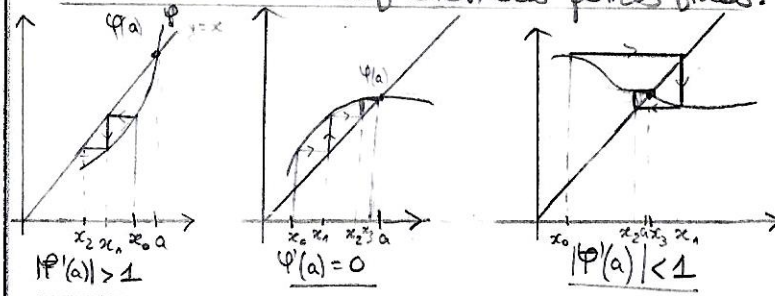
Si on écrit  $A = (a_{ij})$ ,  $D = \text{Diag}(a_{ii}, i \in [1, n])$ ,  $E$  la matrice triangulaire supérieure stricte appartenant dans  $A$ ,  $F$  celle inférieure stricte

$$A = \begin{pmatrix} D & E \\ F & \end{pmatrix}$$

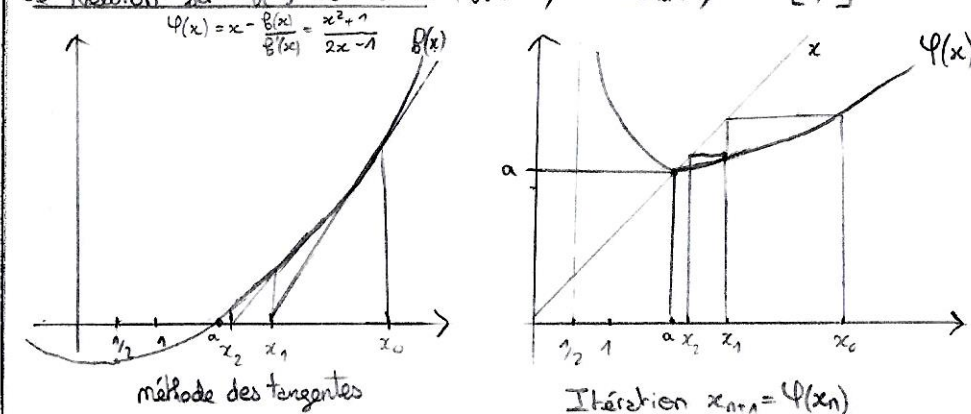
| Nom de la méthode                          | M                            | N                                  | Condition d'existence                                |
|--------------------------------------------|------------------------------|------------------------------------|------------------------------------------------------|
| Jacobi                                     | D                            | $-A + D$                           | D inversible                                         |
| Gauss-Seidel                               | D - E                        | F                                  | D inversible (alors D-E inversible car triangulaire) |
| Relaxation (SOR)<br>$w \in \mathbb{R}_+^*$ | $\frac{D}{w} - E$            | $\frac{1-w}{w} D + F$              | D inversible                                         |
| Gradient<br>$\alpha \in \mathbb{R}^*$      | $\frac{1}{\alpha} \text{Id}$ | $(\frac{1}{\alpha} \text{Id} - A)$ |                                                      |

### Annexe:

Illustration de la classification des points fixes: (Figure 1)



(Figure 2): Illustration de la méthode de Newton sur  $f(x) = x^2 - x - 1$ . ( $f(a) = 0$ , a nombre d'or)  $I = [1; 2]$



[ALL]

[ROU]  
+  
[DEM][ROU]  
p 143

Réf:

[GOU]: Gourdon Analyse, Les maths en tête

[DEM]: Demai, Analyse numérique et équations différentielles

[ROU]: Rouvière, Le petit guide du calcul différentiel

[ALL]: Allaire, Analyse numérique et optimisation.