Idée plan :

I) Suites numérique et convergence
A) Déf
B) Valeurs d'adhérence
Bolzano !
C) Limite inf/sup

[GOU] + [EPAm]

II) Exemples de suites num
A) Suites récurrentes
déf, prop, vitesse de CV + Newton (dév 1)
(regarder ens de Julia)

[GOU] + [EPAm]
[ROU]

B) Suites équiréparties
déf, Weyl ex

[FRA An2]

III) Comportement asymptotiques
A) Équivalents et D.A
↳ sinus itéré (Dév 2)
B) Moyenne de Césaro

[GOU] + [EPAm]

leçon 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

→ Rapport du jury :

- ☐ Suites de nbre cplx aussi ⚠ pas de suites vectorielles
- ☐ Pas parler QUE de suites CV ;
- ☐ Parler de ≠ comportements asymptotiques
- ☐ Bolzano-Weierstrass : Connaître la preuve
- ☐ Parler ~~des~~ de $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$, les maîtriser
- ☐ Thm de Césaro : maîtriser la preuve
- ☐ Résultats autour des ss-gpes de $(\mathbb{R},+)$ → suites denses remarquables
- ☐ Équipartition
- ☐ Méthode de Newton : illustrer vitesse de CV

Réf	Dév
[GOU]	• Sinus itéré
[ROU] - Rouvière	• Méthode de Newton
[EPAm]	
[FRA An2] (équiráp)	

Leçon $\boxed{223}$ Suite numérique

I) Suite numérique et convergence :

A) Définitions :

[ElAm] p. 1

DÉF$_1$: suite numérique

DÉF$_2$: limite $\ell \in \mathbb{R}$ et limite $= \pm\infty$

Ex$_3$: $\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)_n$ admet 1 comme limite

[ElAm] p. 12

THM$_4$: Unicité de la limite

DÉF$_5$ suite CV et DV

PROP$_6$ Toute suite CV est bornée

PROP$_7$: Opération sur les limites

Prop$_8$: KR séq de la continuité d'une fct numérique

[ElAm] p. entre 10 - 14

THM$_9$ Thm des gendarmes] suite réelle

THM$_{10}$ • Toute suite ↗ majorée CV vers $\sup(u_n)$] suite réelle
• ——— ↘ minorée ——— $\inf(u_n)$

DÉF$_{11}$: suites adjacentes

THM$_{12}$: suites adjacentes CV vers la m̂ limite ℓ, $u_n \leq \ell \leq v_n, \forall n$] réelles

Ex$_{13}$: $u_n = \cancel{1}\, 1-\frac{1}{n}$, $v_n = 1+\frac{1}{n^2}$

Déf$_{14}$: Suites de Cauchy

THM$_{15}$: une suite numérique CV $\Leftrightarrow$ elle est de Cauchy

B) Valeurs d'adhérence et suites extraites :

[ElAm] p. 14

DÉF$_{16}$: suite extraite / extractrice

PROP$_{17}$: $(u_n)_n$ CV vers $\ell \Rightarrow$ toute suite extraite CV vers ℓ

Rem$_{18}$: ⚠ réciproque fausse ex...

[ElAm] p. 15 - 16

DÉF$_{19}$: valeur d'adhérence

PROP$_{20}$ Toute suite CV n'a qu'une seule valeur d'adhérence

Rem$_{21}$: en général on utilise la contraposée : $(-1)^n$ DV

[ElAm] p. 36

PROP$_{21}$: $(u_n)_n$ CV vers $\ell \Leftrightarrow (u_{2n})$ et (u_{2n+1}) CV vers ℓ

THM$_{22}$ Bolzano-Weierstrass

C) Limite inférieure / Limite supérieure :

[ElAm] p. 354

DÉF$_{23}$: $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ | $\overline{\lim}\, u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{k\geq n} u_k\right)$. $\underline{\lim}\, u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{k\geq n} u_k\right)$

Prop$_{24}$: $\underline{\lim}\, u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k\geq n} u_k\right) \leq \overline{\lim}\, u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup\limits_{k\geq n} u_k\right)$

Ex$_{25}$: $(-1)^n$, $(n+1)^{(-1)^n}$, autres...

THM$_{26}$: $\lim u_n = \ell \Leftrightarrow \underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n = \ell$

Prop$_{27}$: $\underline{\lim}\, u_n = \inf(\mathrm{adh}(u_n))$, $\overline{\lim} = \sup(\mathrm{adh}(u_n))$

Rem$_{28}$: cette déf ↗ permet de calculer + facilement les $\overline{\lim}$
• les $\overline{\lim}$ interviennent lorsqu'on ne sait pas si la suite CV

↳ ex : trouver le rayon de CV d'une $\sum$ ent : règle d'Hadamard $\frac{1}{R} = \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}$
$\sum a_n z^n$

II) Exemples (classiques) de suites numériques :

A) Suites récurrentes

[GOU] p. 195 - 196

DÉF$_{29}$: suite réc.

Prop$_{30}$: $u_{n+1} = f(u_n)$, si $u_n \to \ell$, f continue en $\cancel{\ell}\,\ell$, alors $f(\cancel{\ell}) = \ell$

Prop$_{31}$: monotonie des suite déf. par $u_{n+1} = f(u_n)$, $f : I \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset I$

Ex$_{32}$: * suites arithm.
* suites géom

Prop$_{33}$: suite réc lin d'ordre 2 ⇝ éq KR, 2 racine simple $\to u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$; 1 racine double $\to (\lambda n + \mu) r^n$

Rem$_{34}$: Résultat + général sur les suites réc. lin d'ordre k.

[ElAm] p. 40 - 43

DÉF$_{35}$: CV géométrique

THM$_{36}$: $(u_n)_n$ nbre réels > 0, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to k$, $k \in]0,1[\Rightarrow (u_n)_n$ CV vers 0 géom.

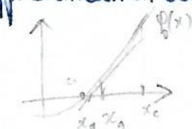
DÉF$_{36}$: Ordre de CV vers 0 (suite dominée par k^{r^n}, $k \in]0,1[$, $r > 1$)
• ——— quadratique ($r = 2$)

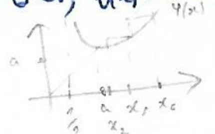
Ex$_{37}$: trouver des exemples

[ROU] p. 142 - 143

THM$_{38}$: Méthode de Newton pour avoir une suite CV de manière quad. vers un pt fixe... $\boxed{\text{Dév 1}}$

Ex$_{39}$: Approximation du nombre d'or, $f(x) = x^2 - x - 1$, $\varphi(x) = \frac{(x^2-1)}{2x-1}$





Plan détaillé [223] Suite :

) B) Suites équiréparties :

[FRAAn2] p.45 – 50

DEF$_{40}$: Suite $(x_n)_n \subseteq [0,1]$ équirépartie

Prop$_{41}$: $(u_n)_{n\geq 1}$ équirépartie $\Rightarrow \overline{\{u_n, n\in\mathbb{N}\}} = [0;1]$

Rem$_{42}$: Réciproque fausse ⚠ ex...

THM$_{43}$: Critère de Weyl

Rem$_{44}$: déf équi-rép mod 1, on a tjr (i) $\Leftrightarrow$ (iii) du critère de Weyl

Ex/Appli$_{45}$: $\theta>0$, $(n\theta)_{n\geq 1}$ équirép mod 1 $\Leftrightarrow \theta \notin \mathbb{Q}$

ou alors remplacer par + de suite récu...

parler de Galton-Watson à la place ?

) Comportement asymptotique :

A) Équivalence et développement asymptotique :

[EPAm] p.25 – 27

DEF$_{46}$:
- suites équivalentes
- suites dominées
- suites négligeables

Exemples$_{47}$: si $u_n \to 0$, $u_n = o(1)$, $u_n = \frac{\alpha}{n} = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, $u_n = \frac{\beta}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\ln(n) = o(n)$

Rem$_{48}$: $\sim$ relat° d'éq

Rem$_{49}$: D.A. de suites peuvent être obtenus à partir de D.L. de ~~suites~~ fct

Ex : $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, si $u_n \to 0$, $e^{u_n} - 1 = u_n + \frac{u_n^2}{2} + o_{+\infty}(u_n^2)$...

Rem$_{50}$: Un D.A. permet d'avoir une idée de la vitesse de CV/DV de la suite

[GOU] p.204 – 205

Lemme$_{51}$: $\sum u_n$, $\sum v_n$ 2 séries à termes >0 tq $u_n \sim v_n$

Si $\sum u_n$ CV alors $\sum v_n$ CV et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

Si $\sum u_n$ DV alors $\sum v_n$ DV et $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$ (8)

Appli$_{52}$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

[GOU] p.219

Appli$_{53}$: $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}$ et $u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$ Dév 2

B) Moyenne de Césaro :

[FRAAn2] p.99

DEF$_{55}$: Converger au sens de Césaro

Ex$_{56}$: $(-1)^n$ CV Cés mais DV

[GOU] p.197

THM$_{57}$: Thm de Césaro (9)

[GOU] p.282

Rem$_{58}$: On retrouve les sommes de Césaro en An. de Fourier

Somme de Fejér ($\sigma_n(f)$) = moyenne de Césaro des sommes partielles de la S.F. d'une fct 2π-périodique.

On a via le thm de Fejér $\sigma_N(f) \xrightarrow{L^p} f$ $\forall f \in L^p$ ($p<+\infty$) alors $S_n(f)$ pas forcément

$\sigma_N(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ $\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors que $S_n(f)$ pas forcément

Réf :

- [EPAm] : El-Amrani – Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions
- [GOU] : Gourdon – Analyse – des Maths en tête
- [ROU] : Rouvière – Le petit guide du calcul différentiel
- [FRAAn2] : Francinou – Oraux X-ens Analyse 2