Leçon [221] - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

→ Rapport du jury :

- ☒ Connaître dim de l'ev des solutions
- ☒ Cas des systèmes à coeff constants ~ avec réd de matrices
- ☒ Méthode de variation des csts. cas ordre 2 simple
- ☒ exp de matrice
- ☒ Stabilité des solution avec analyse spectrale
- ☒ Cauchy-Lip lin : dév
- ☐ Comportem^t des solut° ou de leurs zéros, de certaines éq lin d'ordre 2
- ☐ distribut°

Dev	
C-L lin	[BERT] - Berthelin
Bessel	[FRA_An4]

+ [GOU] + [DEM] Demailly - An num et éq diff

[POM] - Pommellet - Cours d'Analyse

Idée plan :

I) Solutions d'éq diff lin

A) Déf - existence et unicité

déf + ex + ex matrice ordre sup + $\boxed{\text{CL lin}}$ ← Dév 1 + ex

[GOU] [BER] [DEM] ?

B) Structure de l'espace des solutions

syst fond de solut° + déf wronskien ?

[GOU] ou [BER]

II) Résolution explicite

A) Cas particulier : coefficients constants

→ $AY(t) = Y'(t)$ ~~avec 2nd membre~~

diagonaliser A, calcul d'exp, ex forme générale...

+ méthode gordon exp d'ordre p...

B) Cas des coeff variables

variat° de la cste générale + ex [méthode Liouville ? [Pommellet]] ?

forme gén $\boxed{n=1}$

[BER] + [DEM] ou [GOU]

C) Autres méthodes

→ formes particulières 2nd membre + $\boxed{\text{Bessel}}$ Dév 2

[BER] + [FRA An4]

III) Étude qualitative

A) Étude de la stabilité

déf + petites prop + ex + dessin stabilité ?

[BER] ou [DEM]

B) Allure des trajectoires de sys lin dans $\mathbb{R}^2$

selon les v.p de la matrices plein de schémas

[DEM]

Plan détaillé $\boxed{221}$ Éq. diff. lin.

$n\in\mathbb{N}^*$, $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle.

I) Solution d'éq. diff. lin :

A) Existence et Unicité :

[GOU] p. 377 – 378

Def 1 : éq diff lin d'ordre p, hom. ou non

Rem 2 : Se ramène à une éq diff lin d'ordre 1

Ex 3 : 3 ex : simple ; ordre p scalaire ; ordre 1 vect.

THM 4 : C-L linéaire — Dév 1 — [GOU] p. 378 ou [BERT] p. 32 – 33

Vers : sur éq diff scalaire ordre n. — [BERT]

B) Structure de l'espace des solutions :

[BERT] p. 34 – 35

THM 6 : structure de S_H ens des solut° de $y' = A(t)y$, où $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ continue. (avec isom $S_H \to \mathbb{K}^n$, $y \mapsto \{y(t_0)\}$)

Cor 7 : Structure S_G ens sol de $y' = A(t)y + B(t)$

Rem 8 : solut° = solut° éq hom + une solut° particulière

Ex 9 : $y' + y = \sin t \leadsto$ solut° $t \mapsto \underbrace{\frac{\sin t - \cos t}{2}}_{S_P} + \underbrace{\mu e^{-t}}_{S_H}$, $\mu\in\mathbb{R}$ — [GOU] p. 381

Def 10 : Wronskien

[GOU] p. 378 – 379

Ex 11 : wronskien pour éq scal. d'ordre p

Prop 12 : $V_1, \dots, V_n$ solut° de (H). rg de $V_1(t), \dots, V_n(t)$ indép de t

Cor 13 : $V_1, \dots, V_n$ base de $S_H \Leftrightarrow \exists t_0 \in I$ ~~tq~~ $W(V_1(t_0), \dots, V_n(t_0)) \neq 0$; $\hookrightarrow$ dans ce cas $\hookrightarrow \forall t$

[BERT] p. 40 – 41 + 44

Rem 14 : $(V_1, \dots, V_n)$ = syst. de solut° fond. de (H), toute solut° est combi lin des V_i : + déf matrice fondam ?

+ prop sur Wronskien : $W'(t) = A(t)W(t)$ ..?

II) Résolution explicite :

A) Cas particulier : coefficients constants :

[GOU] p. 380 – 381

$\hookrightarrow$ Ici $A(t) = A$ matrice cste.

Prop 15 : $Y' = AY \leadsto t \mapsto e^{tA}V_0$, où $V_0 \in \mathbb{K}^n$ + ex ordre 1 ou 2 ...

Rem 16 : réduire A permet de calculer + facilement e^{tA} : si A diagonalisable ...

si A trigo $\leadsto$ déc. de Dunford ...

• Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on peut réd sur $\mathbb{C}$ puis sol $\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}$ ou φ sol cplx de (H)

[GOU] p. 381

THM 17 : éq diff lin hom d'ordre p $\hookrightarrow$ avec polyn KR P les solut° sont les $t \mapsto \sum_{i=1}^{k} e^{r_i t} P_i(t)$, r_i ~~solut°~~ racine de P d'ordre m_i, P_i de d° $\leq m_i$ — (1) exo 4 p. 385 [GOU]

Ex 18 : degré 2 ...

Appli 19 : $y'' + 2y' + y = 0$ ...

B) Cas des coefficients variables :

[GOU] p. 379 – 380

Rem 20 : pas de méthode générale pour $n \geq 2$

Méthode 21 : (Variat° de la cste) : on cherche une sol ss la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) V_i(t)$ en injectant dans (E) : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) V_i(t) = B(t)$ et les $(V_i(t))_i$ indép $\leadsto$ on résout le système et on intègre les λ_i'

Appli 22 : en dim 2 (= ordre 2) $y'' = a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)$ $\hookrightarrow A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$, $C(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$, (U, V) syst fond sol. $\begin{cases} \lambda' U + \mu' V = 0 \\ \lambda' U' + \mu' V' = c(t) \end{cases}$

Rem 23 : en général on refait les calculs.

Méthode 24 : (Abaissement de l'ordre) si on a une sol. — (3)

[GOU] p. 383

Ex 25 : $t^2 y'' - 2y = 3t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $\leadsto$ sol : $\alpha_1 t^2 + \frac{\beta_1}{t} + t^2 \log|t| - \frac{t^2}{3}$, $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$

Plan détaillé [221] suite

I) C) Autres méthodes:

[BERT] p.65

Prop$_{26}$: second membre $Q(t)e^{\mu(t)}$, $Q \in \mathbb{C}[X]$
éq. d. sca d'ordre n

[BERT] p.64 - 71

Prop$_{27}$: principe de superposit° (pour les 2nd membres)

Rem$_{28}$: on combine les 2 dernières prop.

Ex$_{29}$: • $y^{(3)} - y'' - 2y' = 2e^{3t} \rightsquigarrow$ sp: $t \mapsto \frac{1}{6}e^{3t}$

• $y^{(3)} - y'' - 12y' = e^{3t} + t \rightsquigarrow$ sp: $t \mapsto -\frac{e^{3t}}{18} - \frac{t^2}{24} + \frac{1}{144}t$

[FRANG] p.101

Méthode$_{30}$: solut° dév en Σ ent...

THM$_{31}$: éq. de Bessel — DEV 2

III) Étude qualitative:

A) Étude de la stabilité:

[DEM] p.281 - 287

On considère le problème de Cauchy (P): $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ où la solut° existe sur $[t_0; +\infty[$. Dans la suite f sera linéaire.

Déf$_{32}$: stabilité + asymptotiquement stable (cf Annexe Fig. 1)
+ notat° : $y(t,z)$ = solut° max tq $y(t_0,z) = z$.

Dans la suite $f(t,y) = A y(t)$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$ (syst. lin constant)

Prop$_{33}$: On a $y(t,z) = e^{(t-t_0)A}.z$ donc la stabilité est liée au comport de $e^{(t-t_0)A}$ qd $t \to +\infty$.

• $n=1$: solutions stables $\Leftrightarrow Re(a) \leq 0$

——— asym ——— $\Leftrightarrow Re(a) < 0$

• $n \geq 1$ • Si A diagonalisable de v.p. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, solut° stables $\Leftrightarrow \forall i\ Re(\lambda_i) \leq 0$

— asym — $\Leftrightarrow Re(\lambda_i) < 0$

• Sinon on étudie chaque bloc de trigonalisat° de A (= blocs de Jordan):

→ Supposons $A = \lambda I_n + N$ où N nilpotente triang. sup.

↳ solut° asympt. stable $\Leftrightarrow Re(\lambda) < 0$

sinon elles sont instables

THM$_{34}$: Résumé ↑, stabilité selon les v.p. de A

[DEM] p.286 - 287

~~THM$_{35}$: thm sur petites perturbation d'un système linéaire~~
~~↳ si le syst homogène est asympt stable et le second membre (= perturbat°) est "suffisemt petite", alors les solut° restent asympt. stables.~~

8

B) Allure des trajectoires de systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$:

[DEM] p.290 - 294

On considère le système: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tq $\det A \neq 0$

↳ $X' = AX$

THM$_{36}$: L'allure des trajectoires (autour du point (0,0)) dépend des valeurs propres de A.

On distingue 2 cas:

* v.p. λ_1, λ_2 de A sont réelles (Annexe [Figure 2])

* v.p. λ_1, λ_2 de A non réelles (Annexe [Figure 3])

Annexe

Figure 1: stabilité

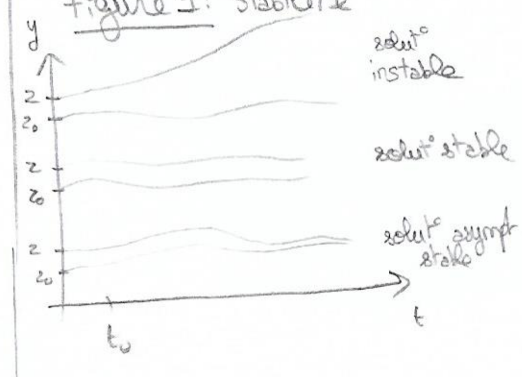
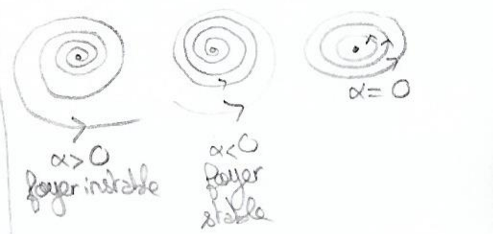


Figure 3: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$



• λ_1, λ_2 de signe opposé

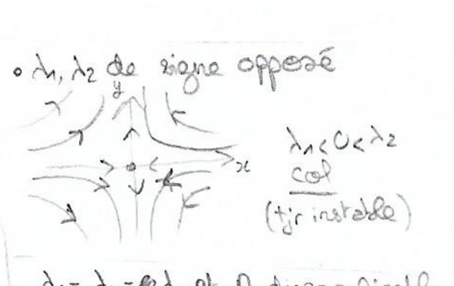
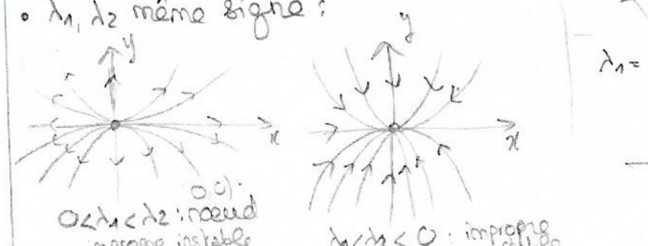
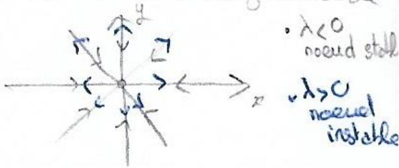


Figure 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

• λ_1, λ_2 même signe :



$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et A diagonalisable



Réf :

- [GOU] - Gourdon - Analyse
- [BERT] - Berthelin - Éq diff
- [FRA-An4] - Francinou - Oraux X-ENS Analyse 4
- [DEM] - Demailly - Analyse numérique et éq. diff