[219] Extremums | défense plan : BEC

Déf1 : • extremum - global / local ...] [ROU] p. 370

I) Existence et unicité d'extremum

A) Compacité $f:(E,d) \to \mathbb{R}$, (E,d) esp. met

[POM] p. 56

THM1 : fct continue sur un compact bornée atteint ses bornes

~~Csq2 : $f:K \to \mathbb{R}$, ses extremum~~

Appli2 : • $\forall x \in E, \exists y \in K$, $d(x, K) = d(x,y)$

• $\exists a, b \in K$, $\operatorname{diam}(A) = d(a,b)$

• si F fermé non vide dans E de dim finie, $\forall y \in E, \exists x \in F$ $d(y, F) = \|x - y\|$.

Csq3 : équivalence des normes en dim finie] pour s'en rappeler

B) ~~Convexité~~ : fct cvx : $C \subseteq \mathbb{R}^n$ cvx non vide $f: C \to \mathbb{R}$ convexe

[ROM] p. 234 à adapter sur $\mathbb{R}^n$ (cf ROU)

[BEC] p. 30

Rem4 : La convexité de fct étant une prop. globale elle assure des ≤ sur C tout entier, donc on a des prop. remarquables face à l'opti

Prop5 : si f diff en $x \in \mathring{C}$ et $df(x) = 0$ alors x est un min global de f.

THM6 : si f admet un min local en $x \in C$ alors ce min est global

Rem7 : La stricte convexité permet d'assurer l'unicité :

Prop8 : Si f strictem' cvx, il existe au + 1 pt minimisant f sur C.

Rem9 : prop 8 utiliser dans l'étude ... Galton Watson pour déterminer la proba d'extinct° de la pop

Rem10 : Quitte à $(x-1)$ on étudie que les min ; la concavité sert souvent pour l'existence et l'unicité du max de vraisemblance en stat

C) Cadre Hilbertien : $(H, \langle . | . \rangle)$ Hilbert

[HIR] + [BEC]

THM11 : Project° sur cvx fermé + KR (dessin Annexe) Dév1

Rem12 : aussi vrai si H préhilbert° et C cvx complet

THM13 : project° sur un ss-espace fermé

Csq14 : $F \oplus F^{\perp} = H$ + KR...

[LI] ou [HIR]

Prop15 : si ss ev de dim finie, expression de p_F en fct d'une bon

Ex16 : $H = \mathcal{C}^0([0;1])$ préhilb, et $F_n = \mathbb{R}_n[X]$, $\exists! p \in F_n$ tq $d(f, F_n) = \|f - p\|$ et $d(f, F_n)^2 = \|p\|^2 - \|f\|^2$. (Pyth)

Ex17 : un exo où $H = L^2([0;1])$, $F = \{f \in H, \int_0^1 f = 0\}$ $d(f, F) = \ldots$ pour $f = \exp$

(corrigé dans LI ; pas corrigé dans HIR) ← 1

D) Maximum de fct ~~holomorphes~~ [TAU]

) je pense pas le faire

II) Caractérisation et recherche d'extremum

A) Conditions sur la différentielle :

mix [BEC] p. 18 + [GOU] p. 336

Prop18 : $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert $f: U \to \mathbb{R}$, si x extremum local de f et si f diff en x alors $df(x) = 0$

Rem19 : x est dit point critique

• La condit° n'est pas nécessaire : $t \mapsto t^3$ admet un pt c. en 0 non ext.

Prop20 : $a \in U$, si $f: U \to \mathbb{R}$ 2 fois diff en a et $df(x) = 0$

* si f admet un min (resp. max) local en a, $d^2 f(x)$ est une f.q. positive (resp. nég)

* Si $d^2 f(x)$ est déf > 0 (resp déf < 0) f admet un min (resp max) local en a.

Rem21 : $f: (x,y) \mapsto x^2 - y^3$ a un pt c. en (0,0) avec sa hessienne ≥ 0 mais ce n'est pas un min

• $g: (x,y) \mapsto x^2 + y^4$ ——— , c'est un min stricte mais sa hessienne n'est pas déf > 0.

Ex22 : En dim 2 on regarde la hessienne de f : $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

$\det H > 0$ et $\operatorname{Tr}(H) > 0 \Rightarrow$ min

——— $< 0 \Rightarrow$ max

$\det H < 0 \Rightarrow$ pas d'extremum

$\det H = 0$ on ne peut pas conclure

[BEC]

Rem23 : Si $d^2 f(x)$ non définie, on peut étudier le dév de Taylor à des ordres supérieurs (+ ex Bec)

II) B) Recherche d'extremum sous-contrainte :

Rappel$_{24}$: déf ss-variété de $\mathbb{R}^n$ ($\mathcal{C}^1$)

THM$_{25}$: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sous variété de dim $n-k$ en $x_0 \in M$

$\Longleftrightarrow$

• $\exists U$ voisinage ouvert de x_0 dans M, $\exists (f_i)_{i=1}^{k} : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ tq $(df_i(x_0))_{i=1}^{k}$ lin. indép, ~~et~~ $U \cap M = \{x \in U \mid f_i(x) = 0 \ \forall i\}$

$\Longleftrightarrow$

$\exists U$ vois. de x_0, $\exists g : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ $\mathcal{C}^1$ tq · $dg(x)$ surjective · $M \cap U = g^{-1}\{0\}$

je crois preuve bien faite dans [H2G2] t.2

[AVEZ] + [LAF]

Ex$_{26}$: S^n sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$ ss-variété de dim n.

THM$_{27}$: Extrema liés + lemme [AVEZ]] ROU énoncé — Dév 2

Appli$_{28}$: diago d'endom. auto-adjoints — [BEC]

Appli$_{29}$: $\forall x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$ tq $\sum \alpha_i = 1$, $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ (3) — [ROU] p.395

C) Une optimisation numérique : Méthode de Newton :

THM$_{30}$: $f : [c;d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $c<d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ sur $[c;d]$. On pose $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $x_{n+1} = F(x_n)$ ~~$x_0 \in [c;d]$~~

• $\exists ! a \in [c;d]$, $f(a) = 0$

• $\exists \alpha > 0$ tq $\underbrace{[a-\alpha ; a+\alpha]}_{I}$ "stable par F et si $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_n$ CV vers a de manière quadratique

Cor$_{31}$: Si de plus f est cvx ($f'' > 0$) alors le résultat précédent est valable pour $I = [a;d]$, $(x_n)_n$ strict ↘ et $x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} \dfrac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$

Rem$_{32}$: Cela revient à approcher le zéro (a) de f grâce aux tangentes de f cf dessin [Annexe] (faire dessin ROU)

[ROU] p 142

Rem$_{33}$: En combinant la méthode de Newton ~~et~~ avec le nbre d'or les condit° de la partie II)A) on peut approcher numériquement un extremum de f. — [BEC]

+ Rem$_{34}$: méthode de Newton sur $\mathbb{R}^n$? Demailly ? j'ai pas le livre sous la main (3)

Réf :

- [POM] . Pommellet
- [ROM] . Rombaldi Analyse
- [BEC] . OA .
- [HIR] ou [LI]
- [GOU] An.
- [ROU] . Rouvière (+ [AVEZ] - [LAF] pr ext. liés)