Leçon [215] : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

→ Rapport du jury :

- Lien df, $\frac{\partial f}{\partial x}$
- différentielle d'appli classiques : $M \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$, M^2, det ...
- Maîtriser thm de différenciat° composée / calcul $\frac{\partial}{\partial x}$ fct composée
- Parler de d^2... + lien hessienne
- Applicat° extrema locaux ↔ hessienne
- Méthode du gradient pour ~~minimation~~ minimisat° de $\frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$, $A \in S_n^{+}(\mathbb{R})$
  ↳ Les calculs doivent être ~~connu~~ acquis ⚠
- exp(matrice) + d'autres thèmes de leçon 214

Dév	Réf
Extrema liés	[GOU]
Lemme de Morse	[ROU] + [QUÉ] - Élém^t d'analyse + [ElAm CD] - El Amrani Calcul diff

→ Pour début : voir [GOU] [AVEZ] ([ROU])

Idée de plan :

I) Calcul diff du 1^er ordre

ou Avez ?

A) Différentiabilité

déf + bcp ex (cf rapp jury) + déf $\mathcal{C}^1$, composée ... + $\mathcal{C}^1$ difféo ?

B) Dérivées directionnelles et partielles

déf + ex + lien avec df + composée + matrice jacobienne + lemme avant lemme Morse !

ROU ou El Am + GOU

II) Différentielles d'ordre supérieure

ou

A) Différentielle seconde - Fct de classe $\mathcal{C}^k$

déf, ex, hessienne + lien avec $\frac{\partial^2 f}{\partial \dots}$ + Schwarz

ROU

B) Formules de Taylor

~~3 f~~ Thm des accroissem^t + 3 formules de Taylor + ex

ElAm + QUÉ

III) Thm fondamentaux :

ROU + GOU

A) Inversion locale

Thm + lemme de Morse — Dév 1 (Thm global ?)

ROU

B) Fonctions implicites

Thm + ex

IV) Problèmes d'extremums

A) Extrema libres

↳ lien avec hessienne

B) Extrema liés

Thm ← Dév 2

ou ElAm

ROU + GOU

+ regarder [BEC]

I) Calcul différentiel du 1er ordre

A) Différentiabilité : E, F 2 $\mathbb{R}$-ev, $U \subseteq E$ ouvert

[GOU] p 323 324

Déf1 : fct diff. en a / fct diff sur U + fct de classe $\mathcal{C}^1$

Rem2 : df(a) dépend des normes ... pas en dim finie · df(a) doit être continue, en dim finie OK

Ex3 : · f réelle, f dérivable en a $\Leftrightarrow$ f diff en a
$df(a) : h \mapsto f'(a) \times h$

- f lin continue, $df(a) = f$
- $f : (X,Y) \in M_n(\mathbb{R})^2 \mapsto XY$, $df(X_0,Y_0).(H,K) = HY_0 + X_0K$
- $f(x) = B(x,x)$ quadratique, $df(x).h \mapsto 2B(x,h)$
- $f : X \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto X^{-1}$, $df(X).H = -X^{-1}HX^{-1}$ (1)
- $d\exp(0)H = H$ + $d\exp(X)H = \dots$

[ROU] p. 50~

Prop4 : diff en a $\Rightarrow$ continue en a

[GOU] p. 324

Prop5 : · $d(f+\lambda g)(a) = df(a) + \lambda dg(a)$
· $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) \dots$ (2)

Rem6 : · si $E = \mathbb{R}$ $(g \circ f)'(a) = dg(f(a))(f'(a))$
$d(fg)(a) = df(a).g + f.dg(a)$

B) Dérivées directionnelles et partielles

[GOU] p. 325 - 326

Déf7 : dérivée selon un vecteur

Prop8 : lien avec diff.

Rem9 : ⚠ dérivée dir $\not\Rightarrow$ diff : $f(x,y) = \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$ dérivable selon tout vect. mais non continue en (0,0)

Déf10 : $E = \mathbb{R}^n$, dérivées partielles

THM11 : lien df(a) et $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \dots$ (3)

Rem12 : ⚠ réciproque fausse : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 \end{cases}$

[ROU] p 48

Cor13 : f $\mathcal{C}^1 \Leftrightarrow \forall i$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue

pour lemme de Morse

Cor14 : Si f est $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert convexe contenant 0, alors $x \in U \mapsto \int_0^1 f(tx)dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur U.

[GOU] p. 327

Déf15 : matrice jacobienne

Ex16 : $f : (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi;\pi[\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $J_f(r,\theta) = \dots$

Prop17 : $F = f \circ \varphi$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(V) \subseteq U$.
$\forall j \in [\![1;m]\!]$, $\frac{\partial F}{\partial y_j}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(a)) \times \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(a)$ $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ (4)

Rem18 : si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, on a $F'(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(a)) \times \varphi_i'(a)$

Rem19 : Lien avec matrice jacobienne $\boxed{J_{f \circ g}(a) = J_f(g(a)) \times J_g(a)}$

II) Différentielle d'ordre supérieure

A) Différentielle seconde - fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

[GOU] p.

Déf20 : dérivée partielle d'ordre p, classe $\mathcal{C}^p$

Rem21 : déf $\Leftrightarrow$ à par réc def $C^1 \dots$

THM22 : Schwarz (5)

Rem23 : sans continuité, résultat faux : $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ 0 & \text{si } y=0, x=0 \end{cases}$

Cor24 : f C^p, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ dépend pas de l'ordre donc on écrit
$\frac{\partial^p f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$ avec $i_1 + \dots + i_n = p$.

[ROU] p. 284 286

Déf25 : matrice Hessienne pour $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
↳ symétrique pour f $\mathcal{C}^2$
↳ $d^2f(a)$ forme bilinéaire, matriciellement $d^2f(a).(h,k) = {}^t h d^2f(a) k = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j$

Rem26 : · remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^p$
$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ par E, F $\rightsquigarrow$ $d^2f(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F)) \simeq \mathcal{L}_2(E \times E, F)$ bilin. cont
· De m̂, on peut itérer aux ordres sup :
$d^3f(a)(u,v,w) = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) u_i v_j w_k$.

II) B) Formules de Taylor :

[GOU] p 327 328

THM$_{27}$: $\neq$ des acc. finis.

Cor$_{28}$: • si U cvx ...

• U cvx, $df(x) = 0, \forall x \in U$, f cste sur U

Rem$_{29}$: TAF n'est plus valable si $n \geq 2$ ...

Not$_{30}$: $$\left[\sum_{i=1}^{q} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]^{[n]} = \sum_{i_1+\dots+i_q=n} \frac{n!}{i_1!\dots i_q!} h_1^{i_1}\dots h_q^{i_q} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_q^{i_q}}(a)$$

↳ dérivée $n^{ième}$ de $t \mapsto f(a+th)$ en $t=0$

[GOU] 328 + 329

THM$_{31}$: Formule de Taylor-Lagrange

Ex$_{32}$: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$: $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \exists \theta \in]0;1[$

$$f(h,k) = f(0,0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \frac{1}{2}\left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\theta h, \theta k) + 2hk \dots\right] + o_{(0,0)}(\|h,k\|^2)$$

[ROU] 287

Rem$_{32}$: formulat° $\Leftrightarrow f(x+h) = f(x) + df(x).h + \frac{1}{2!}d^2f(x).(h,h) + \dots + \frac{1}{p!}d^pf(x+\theta h).(h,\dots,h)$

[GOU] 329 + [ROU] 287

THM$_{33}$: Taylor avec R-I (2 écritures GOU + ROU)

↑ à mettre avant T-Lagrange

THM$_{34}$: Taylor Young.

III) Théorèmes fondamentaux :

A) Inversion locale

[ROU] p. 181 182

THM$_{35}$: inversion locale cf rem de Rou : mieux de se limiter à $\mathbb{R}^n$ plutôt que 2 Banach ...)

Rem$_{36}$: dans la pratique on vérifie $\det df(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}(a_1,\dots,a_n) \neq 0$

Cor$_{37}$: Thm d'inv. globale

[ROU]

Appli$_{38}$: Lemme de Morse + lemme avant Dév 1

(si tps et envie : inv glob + général → thm Hadamard-Lévy [ROU])

[ROU] p. 183

Rem$_{39}$: généralisat° avec classe $\mathcal{C}^k$

B) Fonctions implicites

[ROU] p. 183

THM$_{40}$: Fct implicites + schéma en Annexe

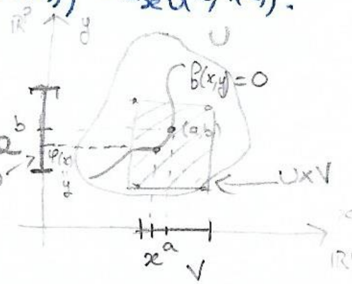
[ROU] p 187 188

Ex$_{41}$: $x^2+y^2-1=0$, $f'_y(x,y) = 2y$ on exclut les pts $y=0$ → $V_1 =]-1;1[$, $W_1 =]0;+\infty[$, $y = \varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ → $V_2 =]-1;1[$, $W_2 =]-\infty;0[$, $\varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$

Prop$_{42}$: Avec not. du thm
$$d\varphi(x) = -\left(d_y f(x,\varphi(x))\right)^{-1} \circ d_x f(x,\varphi(x)).$$

Rem$_{43}$: gén. avec $\mathcal{C}^k$

Schéma en Annexe



IV) Problèmes d'extremums :

A) Extrema libres :

[GOU] p 335 - 338

Prop$_{44}$: extremum relatif en $a \in U$, f diff en a $\Rightarrow df(a) = 0$

↳ a est dit point critique

Rem$_{45}$: ⚠ réciproque est fausse

THM$_{46}$: $Q : x \mapsto d^2f(a)(x,x)$, a pt critique de f $\mathcal{C}^2$
• Si a min (resp. max) relatif en a, Q positive (resp. nég)
• Si Q déf pos (resp déf nég), f admet un min (resp. max) relatif en a.

Rem$_{47}$: Si Q seulement positif, pas forcément de min ($x \mapsto x^3$)
↳ Q positif $\Leftrightarrow$ matrice hessienne l'est...
On peut regarder les valeurs propres de la Hessienne en dim 2 avec $\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2$, $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$

Ex$_{48}$: $f(x,y) = x^4+y^4-2(x-y)^2$: 3 pts critiques $(0,0), (-\sqrt{2},\sqrt{2}), (\sqrt{2},-\sqrt{2})$
~~en (0,0), Hf < 0 pas~~ (0,0) pt col, les 2 autres min rel.

B) Extrema liés

[GOU] p. 337 347

THM$_{50}$: Extremas liés Dév 2

[ROU] p. 362

Rem$_{51}$: géométriquement : Si une courbe C de $\mathbb{R}^2$ est définie implicitement par $g(x,y)=0$, et que l'on cherche le min de x^2+y^2 sur C on cherche le cercle de rayon min touchant C :
La figure suggère que le ~~pt~~ cercle critique est tangent à C au(x) point(s) ~~critiques~~ cherché(s)