Plan détaillé [214] TIL - fct implicites

I) Théorème d'inversion local : $p, q \in \mathbb{N}^*$, $U \subseteq \mathbb{R}^p$ ouvert, $V \subseteq \mathbb{R}^q$ ouvert

A) Difféomorphisme :

[LAF] p. 21 22

Notation$_1$: $f : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, U ouvert. Si f différentiable en $a \in U$, on note $df_a : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ sa différentielle en a, et $\left(\partial_j f^i(a)\right)_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le j \le p}}$ les dérivées partielles en a des composantes f^i de f.

Déf$_2$: $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^k$-difféom. lorsqu'elle est $\mathcal{C}^k$, bijective et que sa réciproque est de classe $\mathcal{C}^k$. U et V sont dits difféomorphes.

Rem$_3$: Dans ce cas, on a $p = q$ car pour $a \in U$, df_a et $d(f^{-1})_{f(a)}$ sont inverses l'une de l'autre.

Ex$_4$: $]-1;1[$ difféom. à $\mathbb{R}$ via $t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$.

• Une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ $(\|\cdot\|_2)$ est difféom. à $\mathbb{R}^n$ via $\begin{vmatrix} B(0,1) \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \frac{x}{1-\|x\|_2^2} \end{vmatrix}$.

Rem$_5$: une fct bijective lisse peut ne pas être un difféo : $\begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^3 \end{vmatrix}$.

Prop$_6$: $f : U \to V$ homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$. Si : $\forall x \in \mathbb{R}^p$, df_x inversible, alors f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme et $d(f^{-1})_{f(x)} = (df_x)^{-1}$. ← pas compris la preuve de LAF...

rester partout avec $\mathcal{C}^1$ au lieu de $\mathcal{C}^k$?? ← je pense oui

B) Théorème d'inversion local :

[LAF] p. 21 24

THM$_7$ (inversion locale) : $f : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$, $(k \geq 1)$ et $a \in U$ tq df_a inversible.

Alors : $\exists V \subseteq U$ ouvert tq $a \in V$ et $f : V \to f(V)$ $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme.

Ex$_8$: $\exists U, V$ 2 voisinages ouverts de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ tels que : $\forall B \in V$, $\exists! A \in U$ tq $A^2 = B$.

Rem$_9$: Il n'y a aucune raison pour qu'un difféomorphisme local soit injectif

Ex : $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy) \end{vmatrix}$ [ROU] p. 196

Cor$_{10}$: $U \subseteq \mathbb{R}^p$ ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$. Si f injective sur U et $\forall a \in U$, df_a inversible, alors $f(U)$ ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f $\mathcal{C}^k$ difféo de $U \to f(U)$ [ROU] p. 182

Ex$_{11}$: $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ difféomorphisme local au voisinage de 0 sur un voisinage de I_n, mais non global de $M_n(\mathbb{R})$ sur son image dès que $n \geq 2$. [ROU] p. 200

(pour les preuves qu'on comprend pas dans LAF, aller voir Cartan [8] ← référencé dans [ROU])

C) Applications :

[ROU]

Déf$_{12}$: [Changement de coordonnées] : $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, un changement de coord. sur V est la donnée de n fonctions $f_1, \dots, f_n : V \to \mathbb{R}$ tq : $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) = (u_1, \dots, u_n)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo de V sur un ouvert $W \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ex$_{13}$: $u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $\forall i \in [\![1;n]\!]$ définit un chang. de coord lorsque $A = (a_{ij})$ inversible

• $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi;\pi[\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-$ est le changement de variable polaire

THM$_{14}$: Soient $f_1, \dots, f_n : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $a \in U$

Alors : $u_i = f(x_1, \dots, x_n)$, $\forall i \in [\![1;n]\!]$ définit un changement de coordonnées sur un voisinage de a ssi $\det\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \le i, j \le n}\right) \neq 0$ — sert à rien ce truc ?

[BRI] p. 256 ou [FARAUT] — VRM utile ?

THM$_{15}$: (Changement de variable dans une intégrale) : Soit $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un changement de variables entre 2 ouverts Δ, D de $\mathbb{R}^n$, soit $f : D \to \mathbb{K} (= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ borélienne ~~et λ intégrable~~

f est $\lambda^{(n)}$-intégrable sur $D \iff (f \circ \varphi)|J_\varphi|$ est $\lambda^{(n)}$-intégrable sur Δ. Dans ce cas

$$\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta |J_\varphi(u)|\, f(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u))\,du$$, où $|J_\varphi|$ est le jacobien de φ.

Appli$_{16}$: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. + ex passage en coordonnées polaires.

[ROU] p. 210

Lemme$_{17}$: Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$, il existe $V \subseteq S_n(\mathbb{R})$ voisinage de A_0 et $\rho : V \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq : $\forall A \in V$, $A = {}^t\rho(A) A_0 \rho(A)$

[ROU] p. 354

THM$_{18}$: [Lemme de Morse] ... Dév 1

[ROU]

Rem$_{19}$: f devient une simple forme quadratique, via un changement de variable, au voisinage de 0, + [bosser exo cas $n=2$ + appli [ROU]] ↳ applis du lemme de Morse ??? ← à finir après déf → ss-variétés → espaces tangents + exo 111

II) Théorème des fonctions implicites :

A) Théorème :

[ROU] p. 184

THM$_{20}$: [Fct implicites] $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ouvert, $(a,b) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ $\mathcal{C}^1$ tq $f(a,b) = 0$ et $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{i=1}^{p}$ est une matrice inversible. Alors : $\exists V \subseteq \mathbb{R}^n$ voisinage de a, $\exists W \subseteq \mathbb{R}^p$ — b, $\exists! \varphi : V \to W$ $\mathcal{C}^1$ tq : $V \times W \subseteq U$; $\left[(x,y) \in V \times W \mid f(x,y) = 0\right] \iff \left[x \in V \text{ et } y = \varphi(x)\right]$

De plus, $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,y)\right)_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,p}}$ inversible, $\forall (x,y) \in V \times W$.

↳ [Fig]. On appelle φ la fonction implicite de f au voisinage de (a,b)

Plan détaillé $\boxed{214}$: Suite

II) A)

[ROU] p. 184–185

Rem$_{27}$: Le théorème signifie que la «courbe» définie par $f(x,y)=0$ peut localement être vue comme le graphe d'une fonction φ.
Si on agrandit trop le voisinage, on perd l'unicité de φ.

Ex$_{28}$: $x^2+y^2-1=0$; on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$, il faut exclure les points où $y=0$.
On a par exemple 2 fonctions implicites φ_1 et φ_2 correspondant aux demi-cercles supérieur et inférieur : $V_1=]-1;1[$, $W_1=]0;+\infty[$, $y=\varphi_1(x)=\sqrt{1-x^2}$
$V_2=]-1;1[$, $W_2=]-\infty;0[$, $y=\varphi_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$

[ROU] 188

Rem$_{29}$: Le théorème des fonctions implicites est valable pour une fonction f $\mathcal{C}^k$, $k\geq 1$, la fonction implicite φ sera aussi $\mathcal{C}^k$.

[BEC] p. 11

Appli$_{30}$: $P\in\mathbb{R}[X]$ et $x_0\in\mathbb{R}$ racine simple de P. Cette racine dépend localement du polynôme de manière $\mathcal{C}^\infty$.

B) Différentielle de la fonction implicite :

[ROU] 186

Cor$_{31}$: Avec les notations du thm$_{20}$, on a : $\forall x\in V$, $d\varphi_x=-\left(\partial_y f_{(x,\varphi(x))}\right)^{-1}\circ\partial_x f_{(x,\varphi(x))}$
où $\partial_y f$ est la différentielle partielle de f p/r à y, ou encore la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)^t_{\substack{i=1..n\\ j=1..p}}$
En terme de dérivées partielles : $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x,\varphi(x))+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x,\varphi(x))\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}(x)=0$
$\forall(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]$

[ROU] 232

Appli$_{32}$: On peut obtenir une ~~solution~~ valeur approchée de la solution réelle de $x^7+0{,}99x-2{,}03=0$, en approchant $\begin{cases}0{,}99=p_0 \text{ par } p_0=1\\ 2{,}03=q_0 \text{ par } q_0=2\end{cases}$ et en étudiant les variation de la racine x quand (p,q) varie.

Rem$_{33}$: Grâce au théorème des fonctions implicites (et au cor$_{31}$) on peut obtenir une preuve matricielle du théorème des extremas liés (cf III C)
+ travailler exo 76 [ROU] p. 229

III) Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, espaces tangents et extrema liés :

A) Sous-variétés :

[LAF] p. 27

Déf$_{34}$: Une immersion (de classe $\mathcal{C}^k$) d'un ouvert $U\subseteq\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ est une application $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^q$ dont la différentielle en tout point est injective.
Une submersion ________ surjective.

Déf$_{35}$: Une partie $M\subseteq\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ lorsque :
$\forall x\in M$, $\left.\begin{array}{l}\exists\, U,V \text{ voisinages ouverts de } x \text{ et } 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n\\ \exists\, f: U\to V \text{ difféomorphisme}\end{array}\right\}$ tq $f(U\cap M)=V\cap(\mathbb{R}^p\times\{0\})$

Rem$_{36}$: p est unique
On peut remplacer 0 et $\mathbb{R}^p\times\{0\}$ par un point et un sous-espace affine de dim p
On peut définir une sous-variété locale en un point $a\in M$ (en enlevant la condition "$\forall x\in M$")

[ROU] p. 189

• L'idée est qu'une sous-variété se ramène localement à un espace vectoriel par un changement de coordonnées. On peut "redresser" M
↳ cf [Fig ...].

[LAF] p. 28–31 + [AVEZ] p. 94 pour (1)

THM$_{37}$: $M\subseteq\mathbb{R}^n$, LASSE : ((1) $\forall a\in M$, $\exists\, U\subseteq\mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de a, $\exists(f_i)_{i=1}^{n-p}: U\to\mathbb{R}$ lisses tq $U\cap M=\{x\in U \mid f_1(x)=\dots=f_{n-p}(x)\}$ et $(df_{i_x})_{i=1}^{n-p}$ lin. indép, $\forall x\in U$).
en fait on revient tt le tps à ça par la preuve
[AVEZ] preuve !
(0) M sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$
(2) $\forall a\in M$, $\exists\, U\subseteq\mathbb{R}^n$ ouvert contenant a, $\exists\, g: U\to\mathbb{R}^{n-p}$ submersion, tq $U\cap M=g^{-1}(0)$
(3) $\forall a\in M$, $\exists\, U\subseteq\mathbb{R}^n$ ouvert contenant a, $\exists\,\Omega\subseteq\mathbb{R}^p$ ouvert contenant 0, $\exists\, h:\Omega\to\mathbb{R}^n$ immersion dans $\mathbb{R}^n$ et homéomorphisme de Ω sur $U\cap M$ [h est une paramétrisation locale de M
(4) $\forall a\in M$, $\exists\, U\subseteq\mathbb{R}^n$ ouvert contenant a, V ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a_1,..,a_p)$ et une application $\varphi: V\to\mathbb{R}^{n-p}$, $\mathcal{C}^k$ tq (après permutation éventuelle des coordonnées), $U\cap M=$ graphe

[H2G2] p. 80

Ex$_{38}$: • La sphère $S^n\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dim n de $\mathbb{R}^{n+1}$
• $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dim $\frac{n(n-1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^{n^2}$
• $Sl_n(\mathbb{R})$ sous-variété de $M_n(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^{n^2}$
↑ aussi dans [AVEZ] p. 95

B) Espaces tangents :

[LAF] p. 32

Déf$_{39}$: $A\subseteq\mathbb{R}^p$, $a\in A$. On dit que v est un vecteur tangent à A en a lorsqu'il existe I intervalle ouvert contenant 0 (comme $]-\varepsilon;\varepsilon[$, $\varepsilon>0$) et $\gamma: I\to\mathbb{R}^p$ tq $\begin{cases}\gamma(I)\subseteq A\\ \gamma(0)=a\\ \gamma'(a)=v\end{cases}$

THM$_e$-déf$_{40}$: Les vecteurs tangents en a un point $a\in M$, où M sous-variété de dim p de $\mathbb{R}^n$ forme un e-v. de dim p, on le note T_aM c'est l'espace tangent à M en a.

Rem$_{41}$: On identifie souvent l'espace vectoriel T_aM à l'espace affine passant par a et parallèlement à T_aM.

[AVEZ] p. 98

THM$_{42}$: On reprend les notations et points du THM$_{37}$, on considère $M\subseteq\mathbb{R}^n$ sous variété de dim p, $a\in M$
(1) L'espace tangent en a : $T_aM=\bigcap_{i=1}^{n-p}\operatorname{Ker}(df_{i_a})$
(2) $T_aM=\operatorname{Ker}(dg_a)$
(3) ~~Soit $m=h^{-1}(a)$, $T_aM=\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(dh_a)$~~ $x\in\Omega$ tq $a=h(x)$, $T_aM=\operatorname{Im}(dh_x)$
(4) $T_a=$ graphe de $d\varphi_v$ où $a=(v,\varphi(v))$

[H2G2]

Ex$_{43}$: $T_{I_n}(O_n(\mathbb{R}))=\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $T_{I_n}(Sl_n(\mathbb{R}))=\operatorname{Ker}(Tr)$

C) Extremas liés

[AVEZ] p. 103

Dév 2 → Lemme + Thm

Rem$_{46}$: Les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange

[BEC] p. 21

Appli$_{47}$: E espace eucli, $u\in\mathcal{L}(E)$ autoadjoint, il existe une b.o.n de E formée de vecteurs propres de E

[ROU] p. 395

Appli$_{48}$: $\forall x_i\geq 0$, $\alpha_i>0$ $x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\leq\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n$
↳ $\sum\alpha_i=1$

Réf :

[LAF] : Lafontaine - Intro aux variétés différentielles (nouvelle édition)

[ROU] : Rouvière

[AVEZ] : Avez - Calcul différentiel

[BEC] + [H2G2] (applis / exs)

[FARAUT] juste pour changement de variables.

+ flemme de faire les figures...