Leçon $\boxed{213}$: Espaces de Hilbert. Base hilbertiennes. Exemples et applications.

→ Rapport du jury :

- ☐ Faire ≠ base algébrique et base hilbertienne
- ☐ Formule de project° ⊥ sur ss-ev de dim finie
- ☐ Procédé de Gram-Schmidt
- ☐ Exemples de bases hilbertiennes (polyn. ⊥, Σ Fourier...)
- ☐ Formule de Parseval, Bessel
- ☐ Faire attention à la signification de $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$
- ☐ Thm de project° sur un convexe fermé + conséquences : • Riesz ; $F^{\perp\perp} = F$; $F^\perp = \{0\} \Leftrightarrow F$ dense
- ☐ Adjoint
- ☐ Thm spectral des op. auto-adjoints compacts
- ☐ Résolution/approximat° de Pb aux limites en dim 1 ccc ?
- ☐ Construction de l'espace de Hilbert-Sobolev $H_0^1(]0;1[)$
- ☐ Thm de Lax-Milgram + applications

Dév

1) Polyn ⊥ ... (densité) → Objectif Agreg [BEC]
2) Projection sur un CVX fermé → [BRE] Brezis (Analyse fonctionnelle) ou [HIR] Hirsch (élém^t d'an. fct) ou [SKA] Skandalis (Topologie et an.)

Réf

Objectif Agreg [BEC]

[BRE] Brezis (Analyse fonctionnelle)

ou [HIR] Hirsch (élém^t d'an. fct)

ou [SKA] Skandalis (Topologie et an.)

[BEC] + [HIR]

[GOU] ? Gourdon Analyse ?

[DEM] ? Demailly Analyse numérique ?

Plan $\boxed{213}$:

I) Espaces de Hilbert — [HIR] + [BEC]

A) Espaces préhilbertiens

→ déf, C-S, ex

→ id prlgm, polarisat°

B) Orthogonalité :

déf, $A^\perp$, Pyth.

C) Hilbert

→ déf, exemples

peut-être diffusée ailleurs

II) Projection sur un convexe fermé et csq : — [HIR] + [BEC]

A) Thm de projection (Dév 1)

→ $\boxed{\text{Thm}}$ prop de P_C, cas où $C = F < ev$, $E = F \oplus F^\perp$

B) Conséquences : Riesz et adjoint.

→ Thm de rep. de Riesz, existence opérateurs adjoints + 1ère prop.

III) Base hilbertienne + Exemples

A) déf et 1ère prop : — [HIR] [BEC] + [GOU] ?

→ déf + project° sur ev formule ; + Bessel + Parseval + $\boxed{\text{KR base hilb}}$

• rem ≠ base alg.

B) Polyn. ⊥ $L^2(I,\rho)$ — [BEC] + [HIR] ou [DEM] ?

→ déf, poids, exemple, $\boxed{\text{Thm densité}}$ Dév 2

C) Séries de Fourier $L^2(\mathbb{T})$ — [GOU] + [HIR]

→ déf, base hilb, eg Parseval ⤳ exemples

Plan détaillé [213] Espaces de Hilbert

I) Espace de Hilbert

A) Espace préhilbertien

[HiR] p.84 – 87

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E = ev sur $\mathbb{K}$

Déf1 : produit scalaire (sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) + espace préhilbertien

~~Rem2 : ... norme dite norme euclidienne~~

Ex2 : $\cdot\,\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d$ produit scalaire canonique
$\cdot\,\ell^2(\mathbb{N})$, $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$

Prop3 : ≠ C-S + cas d'égalité

Cor4 : $x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$ norme, dite norme ~~euclidienne~~ hilbertienne

Prop5 (Id du prlgm + id. de polarisation)

$\mathbb{C}$: $\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$

$\mathbb{R}$: $\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

Déf6 : Hilbert

Ex7 : $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, $\ell^2(\mathbb{N})$, $\ell^2(I)$ où un $\ell_2(\mathbb{N}) \leftarrow$ cf [HiR] p. 90

B) Orthogonalité : On note E espace préhilb. $\langle\,|\,\rangle$ p.s, $\|\cdot\|$ norme associée

[HiR] 87 – 88

Déf8 : vecteurs $\perp$

Déf9 : $A^\perp$ pour $A \subseteq E$ partie

Rem10 : $A^\perp = \bigcap_{y\in A} \mathrm{Ker}(\Phi_y)$ où $\Phi_y : x \mapsto \langle x|y\rangle$ forme lin continue $\Rightarrow$ $A^\perp$ fermé ssev ~
et $A^\perp = \overline{A}^\perp$

THM11 : Pythagore

Prop12 : $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$, $A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(A)}$

Déf13 : $\cdot$ famille orthogonale
$\cdot$ —— orthonormée

Ex14 : des ex

Prop14 : Une famille $\perp$ dont aucun élément est nul est libre

[HiR] p.107

[GOU] p 253

THM15 : Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

II) Projection sur un convexe fermé et conséquences

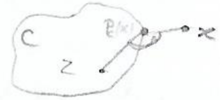
A) Thm de projection : On se place sur $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un Hilbert

Dév1 A

[HiR] p.91 – 94

THM16 : thm de projection sur un convexe fermé non vide

Rem17 : cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, KR avec l'angle obtus



Prop18 : P_C est 1-lip. sur H

Prop19 : F ss-ev fermé de H, $P_F : H \to F$ linéaire
KR : $P_F(x)$ l'unique élément y vérifiant : $y\in F$ et $x-y\in F^\perp$

Cor20 : $\cdot\, F<H$ fermé $F\oplus F^\perp = H$
$\cdot\, F<H$ (pas forcément fermé) $\overline{F}\oplus F^\perp = H$

Cor21 : Ainsi $\overline{F} = H \iff F^\perp = \{0\}$ et $\overline{F} = F^{\perp\perp}$ pour $F<H$

[BEC] OXO p.99

Ex22 : projection de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $C = \{(x_n)_n \subset \ell^2(\mathbb{N}) \mid \forall n\geq 0, x_n \geq 0\}$

Prop23 : Si $F<H$ ssev de dim finie avec $(e_1,\dots,e_p)$ base orthonormée de F
$P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i$

B) Conséquences :

Dév1 B

THM24 : Thm de Riesz

[HiR]

Prop-déf25 : Adjoint d'un opérateur $T\in B(H) \leftarrow$ ens. des op. continues de H

Prop26 : $\cdot\, T \mapsto T^*$ linéaire ($\mathbb{R}$)/antilin ($\mathbb{C}$)
$\cdot\, T^{**} = T$
$\cdot\, \|T^*\| = \|T\|$
$\cdot\, \forall\, T,S\in B(H)$, $(TS)^* = S^*T^*$

Ex27 : $E=\mathbb{R}^d$ muni du p.s. canonique, $L(E)$ s'identifie à $M_d(\mathbb{R})$
$T^* = {}^tT$, sur $\mathbb{C}^d$, $T^* = {}^t\overline{T}$

Plan détaillé [213] suite

III) Base hilbertienne - Exemples : $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ espace de Hilbert

A) Définition et premières prop :

[BEC] p.107 - 109

Déf$_{28}$: base hilbertienne

Rem$_{29}$: $\neq$ base hilb. et base algébrique

Ex$_{30}$ sur $\ell^2(\mathbb{N})$

THM$_{31}$: existence base hilbertienne (admis sans séparabilité)

Dans la suite, on considère H séparable

[HiR] p.109

Prop$_{32}$: (Inégalité de Bessel)

Thm$_{33}$: (Bessel-Parseval)

[HiR] p.109 - 110

Cor$_{34}$: $\left|\begin{array}{l} H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x \longmapsto (\langle x|e_n\rangle)_n \end{array}\right.$ isométrie linéaire surjective

Thm$_{35}$: $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x|e_n\rangle e_n \quad \forall x \in H$.

B) Polynômes orthogonaux

[BEC] 110 - 112

Déf$_{36}$: fct poids

Déf$_{37}$: $L^2(I, \rho)$

Prop$_{38}$: $L^2(I,\rho)$ Hilbert et tout polynôme $\in L^2(I,\rho)$

THM$_{39}$: Existence (et unicité) des polyn. $\perp$ (unitaires) de $L^2(I,\rho)$

Ex$_{40}$: * Polyn. de Hermite / Polynômes de Legendre

Appli$_{41}$: $S_N = \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_N)$, $\min\{\|f-p\| \,|\, p \in S_N\} = \|f - p_N(f)\|$

où $p_N(f) = \sum_{k=0}^{N} \langle f, P_k\rangle_\rho \frac{P_k}{\|P_k\|_\rho^2}$

Dev2 [BEC] p.140

THM$_{42}$: $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, ρ fct poids tq $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$

Alors $(P_n)_n$ polyn $\perp$ de $L^2(I,\rho)$ est une base hilbertienne (pour $\|\cdot\|_\rho$)

[BEC] p.112

Appli$_{43}$: base hilb. de $L^2(\mathbb{R})$ $\left|\begin{array}{l} L^2(\mathbb{R},\rho) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto f\sqrt{\rho} \end{array}\right.$ isométrie bijective

avec $\rho(x) = e^{-x^2}$, $(P_n)_n$ poly Hermite

[illegible] base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$

(*) Exemple : $\rho(x) = e^{-x^2/2}$ respecte l'énoncé du thm, donc les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R},\rho)$

C) Application aux séries de Fourier :

[BEC] p.122 - 124

• $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; les fct définies sur $\mathbb{T}$ s'identifient aux fct 2π-périod.

Déf$_{44}$: $L^2(\mathbb{T})$ muni du p.s. $\langle\cdot|\cdot\rangle$ = espace de Hilbert séparable

Déf$_{45}$: les coeff de Fourier d'une fct sont $c_n = \langle f|e_n\rangle$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

Prop$_{46}$: $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale

THM$_{47}$: $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne (résulte du Thm de Fejér)

Conséq$_{48}$: $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$ ⚠ égalité p.p. ne dit pas que la série CV unif.

ce qui signifie que $\|S_N(f) - f\|_2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ où $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e_k$

THM$_{48}$: égalité de Parseval

[GOU]

Appli$_{49}$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Réf : [HiR] : Hirsch - Éléments d'analyse fonctionnelle

[GOU] : Gourdon - Les maths en tête - Analyse

[BEC] : Beck - Objectif Agrég (2nd éd.)