Plan détaillé [209] Approx. de fct

I) Approximation de fonctions régulières :

A) Approximation locale :

[GOU] p. 70 ou [ROM]

THM$_1$: Formule de Taylor-Young (pour $f : I \to \mathbb{R}$)

Rem$_2$: • utile dans les Pb d'étude d'extremum] [GOU] • Ici on a pas d'information sur le reste $o(h^{n+1})$, le thm suivant en apporte

THM$_2$: formule de Taylor avec reste intégral

Appli$_3$: $\forall x \geq 0 \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$) ici $o(h^{n+1}) = \frac{x^5}{120}$

THM$_4$: Interpolation de Lagrange

[ROM] p. 257

THM$_5$: Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $\forall x \in [a,b]$, $\exists c_x \in [a,b]$ tq $f(x) - L_n(f)(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) \wedge f^{(n+1)}(c_x)$

où $\pi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ ← pts d'interpolat°

Rem$_6$: Ce thm permet d'obtenir une expression de l'erreur d'interpolat° sur tout $[a,b]$.

B) Approximation uniforme sur un compact : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, K compact d'un espace métrique

Prop$_7$: $(\mathcal{C}(K,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach + déf de $\|\cdot\|_\infty$

Rem$_8$: On cherche des moyens d'approcher f uniformément sur K (i.e en $\|\cdot\|_\infty$)

[QUE] p. 518

THM$_9$: Bernstein (sûrement sans le 3) (4) (peut-être on enlever 2)

[QUE] p. 86

Cor$_{10}$: THM de Weierstrass : pour $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$

Rem$_{11}$: Ce thm peut aussi se démontrer via Fejér cf. II B)

[GOU] p. 306

Appli$_{12}$: $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_0^1 t^n f(t) = 0$ alors $f = 0$

[QUE] topo. [TAU]?

THM$_{13}$: Runge   dév 1 ?

Rem$_{14}$: version forte de Runge.

des appli/exs de tt ça ?

II) Approximation de fonctions intégrables :

A) Convolution et régularisation : on se place sur $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

[ElAmF] p. 75 - 89

Déf$_1$: produit de conv + ex$_1$, sur Π ?

THM$_2$: $f,g \in L^1 \Rightarrow f*g \in L^1$ et $(L^1(\mathbb{R}), +, \cdot, *, \|\cdot\|_1)$ alg. de Banach commutative

Prop$_3$: convolut° L^p/L^q

THM$_4$: # d'Young ← sûrement à enlever

Déf$_5$: Approx de l'unité

ex BEZ [Rem$_6$: construction à partir de $\varphi \geq 0$, tq $\int \varphi = 1 \rightsquigarrow \varphi_n = \varphi(n\cdot) \times n$

Ex$_7$: • noyau de Gauss $\gamma_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{2}}$ (ou $\gamma_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}}$ et $s \to 0$)

• Approx de Laplace

THM$_8$: approx. sur ~~L^1~~ L^p, $p \in [1,+\infty[$ et $(\mathcal{C}_{unif, bornée}, \|\cdot\|_\infty)$

[ElAmF] p. 90 - 96

THM$_9$: convolut° et dérivat° → $f \in \mathcal{C}^p$, $g \in L^1_{loc}$ et f ou g à supp compact $\Rightarrow f*g \in \mathcal{C}^p$ et..

~~$f \in L^p, g \in \mathcal{C}_c^p$~~

Déf$_{10}$: suite régularisante

Rem$_{11}$: construction à partir de $\varphi : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) \mathbb{1}_{|x|<1}$ ...

THM$_{12}$: CV pour $f \in L^p$ / $f \in \mathcal{C}_0^0$

Cor$_{13}$: $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dense dans L^p ~~$\mathcal{C}_0$~~

[ElAmF] + lou

Appli$_{14}$: Lemme de Riemann-Lebesgue

Appli$_{15}$: $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ est injective

B) Cas particulier de $L^2(I,\rho)$

à enlever, chiant, utilise lemme de Zorn

[ElAmF] p. 49

THM$_{16}$: Tout espace de Hilbert E sur $\mathbb{K}$ possède une base hilb. + isomorphisme avec $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$

bon après ça preuve est peu difficile

[ElAmF] p. 40 - 48

Déf-Prop$_{17}$: poids sur I intervalle, $L^2(I,\rho)$ + $\langle\cdot|\cdot\rangle$; Thm : $L^2(I,\rho)$ Hilbert

Prop$_{18}$: existence - unicité polyn $\perp$

à vérif !

Ex$_{19}$: Laguerre, Hermite, Legendre] + BEC

THM$_{20}$: Si I borné, alors les polyn $\perp$ = base ht $L^2(I,\rho)$

Rem$_{21}$: plus vrai sur $]a,b[$ non borné ex $w(x) = x^{-\ln(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

[BEC]

THM$_{22}$: densité polyn $\perp$ ...   Dév

Rem$_{23}$: polyn de Hermite permettent de déduire une base hilb. de $L^2(\mathbb{R})$

où voir ce que fait [ROM] ? ← pas tip top pcq c'est sur $\mathcal{C}^0_{pm}$ et non $L^2(I,\rho)$ ...

Suite [209]

II) Approximation de fonctions périodiques :

A) Mise en contexte :

Notation 24 : $\mathcal{C}_{2\pi}$, $L^p_{2\pi}$ ← muni de $\|.\|_p : f \mapsto \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi}\right)^{1/p}$ + $\|.\|_\infty$

Prop 25 : $\mathcal{C}_{2\pi} \subseteq L^\infty_{2\pi} \subseteq L^p_{2\pi} \subseteq L^1_{2\pi}$

THM 26 : $\mathcal{C}_{2\pi}$ dense dans $L^p_{2\pi}$, $\forall p \in [1, +\infty[$.

Déf 27 : coeff de Fourier de $f \in L^1_{2\pi}$ + rem si $f \in L^2_{2\pi}$, $\langle f, e_n \rangle$ + $a_n(f)$, $b_n(f)$ où $e_n = t \mapsto e^{int}$

Déf 28 : $f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-x) g(t)\, dt$. $f, g \in L^1_{2\pi}$

Prop 29 : $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$; $f * e_n = c_n(f) e_n$, si $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_{pm}$; $c_n(f') = in c_n(f)$ — de trop →

THM 30 : Riemann-Lebesgue + R.L généralisé OUI ← cf [QUÉ]

Déf 31 : série de Fourier

[ElAmF] p 169 - 178

B) Convergence au sens de Césaro :

Déf 32 : noyau de Dirichlet

Prop 33 : D_n pair $\int_{-\pi}^{\pi} D_n \frac{dt}{2\pi} = 1$; $D_n(x) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin(x/2)}$; $S_n(f) = f * D_n$

Déf 34 : Noyau de Fejèr

Prop 35 : the prop noyaux Fejèr

[QUÉ] p 75 - 77

THM 36 : Fejèr — Dév...

[QUÉ]

Appli 37 : $f \in L^1 \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ injective

Appli 38 : Autre preuve du Thm de Weierstrass

C) Convergence de la série de Fourier :

THM 39 : Via le thm de Fejèr, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Prop 40 : $\cdot f \in L^2_{2\pi}$, $S_n(f) \xrightarrow{\|.\|_2} f$, + formule de Parseval

$L^2_{2\pi} \to \ell^2_{2\pi}$, $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ isométrie isomorphisme

THM 41 : Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $\sum |c_n(f)|$ CV alors $S_n(f)$ CV normalement vers f

THM 42 : Dirichlet

Prop 43 : Si $f \in \mathcal{C}^1_{pm} \cap \mathcal{C}_{2\pi}$, sa Σ de F CVN vers f.

Appli 44 : éq de la chaleur cf [FRA. An4] ← faudra que j'apprenne ce dév un jour...

[ElAmF] un peu partout ou [QUÉ] un peu partout

[FRA. An4]

Réf :

- [GOU] - Analyse
- [ROM] - Analyse
- [QUÉ] - Analyse pour l'agrég

[El.AmF]

Pour dév :

- [BEC]
- [QUÉ] Topologie

[FRA. An4]

- Elle manque d'applications je trouve cette leçon.
- On donne des moyens d'approcher une fct mais je donne pas de raisons

↳ I) A) À quoi ça sert d'approcher localement f ?
B) ——— unif — ?