Idée plan : 208 Esp. vect. normés, appli. lin. continues. Exemples.

I) Espaces vectoriels normés

A) Normes sur un espace vectoriel

- déf $\|.\|$, ex, $\|.\|$ ∼ ou non

B) Applications linéaires continues

[GOU] déf, K R, $|||\ |||$, ex simples, fct continues $\|\ \|$ mais non continues $\|.\|'$

C) Cas particulier : dimension finie :

- Toutes normes ∼
- Thm de Riesz ⇒ compacts = fermés bornés, sev fermé
- appli lin ⇒ continues
- exemples normes de matrices
- rayon spectrale matrices → $X_{n+1} = AX_n$

[SER] ou [ROM] ?

II) Espaces de Banach

A) Déf - 1ère prop

[LI] [GOU] déf, ex simples, ⚠ Thm prolongement des fct unif. continues ⚠

B) Exemple des espaces L^p :

[RUD] déf, ex, Hölder, Minkowski, Riesz-Fischer

C) Thm de Baire et Csq

[LI]) peut sauter je pense

Applications :

III) 2 Exemples importants d'applicat° lin

A) Hilbert et projection :

déf Hilbert [...] Thm project° Dév 1 [HIR]

B) Transformée de Fourier

[RUD] déf TF sur L^1, continuité non surjectivité (via Thm Baire)

Prolongement sur L^2 Dév 2

Leçon 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples

Rapport du jury :

- ☐ Bcp d'exemples !
- ☒ Exemples de calculs de $|||.|||$ (penser aux $|||A|||_{1,\infty,2}$ matrices ...)
- ☒ Lien avec la CV des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ (+ illustrat°)
- ☐ Connaître la pertinence des exemple (pas de dév trop sophistiqué là dessus)
- ☒ Énoncé + preuve Thm de Riesz (compacité de $\overline{B(0,1)}$ sur ev dim finie)
- ☒ Équivalence norme en dim finie + ssev en dim finie fermé ⚠ ne pas boucler ⚠
- ☐ Exemples normes usuelles non éq. (sur esp. suites / fct) + appli lin non continues
- ☐ Illustrer Riesz sur ex simples (espaces classiques de dim < +∞)
- ☐ Espaces de Hilbert ⚠ pas trop

Dév	Réf
• Thm de project° sur cvxe fermé + corollaire si C sev	[GOU] Gourdon Analyse [Hirsch] [HAU] Hauchecorne, Exemples et contre-ex
• Fourier . Plancherel	← [Rudin] (ou Amrani - Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels... ?) [LI] - Li Cours d'analyse fonctionnelle [SER] - Serre, Les matrices, théorie et pratique

Plan détaillé $\boxed{208}$ Evn ...

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Espaces vect. normés :

A) Norme sur un e.v.

[LI] p. 1 – 7

Déf$_1$: norme

Rem$_2$: $d(x,y) = \|x-y\|$..

Ex$_3$: Sur $\mathbb{K}^n$, $\|x\|_p$, $\|x\|_\infty$
sur ℓ_p, c_0 ..
sur $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{K}) \to \|\cdot\|_\infty$
(sur $L^p(\Omega), \|\cdot\|_p$?)

[LI] p 15

DÉF$_4$: normes équivalentes

Rem$_5$: ⟵ $id_E : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|')$ homéom.

[GOU] p. 13

Ex$_6$: sur $\mathbb{K}^n$, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$
sur $\mathcal{C}([0,1])$, $\|\cdot\|_\infty \not\sim \|\cdot\|_1$) ①

[LI] p. 15

B) Applications linéaires continues. E, F 2 $\mathbb{K}$-ev

[GOU] p 47

THM$_7$: $f \in \mathcal{L}(E,F)$ $\boxed{\Leftrightarrow}$ applicat° lin continue

Déf$_8$: $|||\ |||$ sur $\mathcal{L}(E,F)$

[GOU] p. 48

Rem$_9$: $|||\cdot|||$ + petite cste ... , $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq |||f|||\,.\,\|x\|$

Prop$_{10}$: $|||f \circ g||| \leq |||f|||\ |||g|||$, $|||\cdot|||$ norme d'alg sur $L(E,E)$

Rem$_{11}$: Continuité dépend de la norme choisie.
δ_0 : $\mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{K}$ continue pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas $\|\cdot\|_1$] ②
$f \longmapsto f(0)$

[LI] p. 19 – 21

Ex$_{12}$: $J : \ell^q \to \ell^{p*}$, $(b_n)_n \mapsto \left[a \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right]$ linéaire continue avec $|||J||| = \|b\|_q$
$1 < p < +\infty$
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Ex$_{13}$ (classique) on identifie $M_d(\mathbb{R})$ à $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, on note $|||\cdot|||_p$ norme subordonnée associée à $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^d$.
$\forall A \in M_d(\mathbb{R})$, $|||A|||_1 = \max_{1 \leq j \leq d} \sum_{i=1}^{d} |a_{ij}|$; $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(AA^*)}$

[ROM.AL] p. 736

THM$_{14}$: $A \in M_n(\mathbb{C})$ LASSE :
1) $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0$, 2) $\forall x_0 \in \mathbb{C}^n$, $(x_k)_k$ déf. par $x_{k+1} = Ax_k$, CV vers 0] ③
3) $\rho(A) < 1$ ...

C) Cas particulier : dimension finie : E ev de dim $n < +\infty$

~~THM$_{15}$ Si E, toutes les normes sont équivalentes~~

[ROM] p 34 – 37

Lemme$_{15}$: Soit $(e_i)_{i=1}^n$ base de E et $\|\cdot\|_\infty$ la norme définie sur E par :
$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
↳ la boule unité fermée B_∞ et la sphère unité S_∞ sont compactes dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$

[LI] → Csq$_{16'}$ En dim finie toutes les normes sont ~

Lemme$_{16}$ (de Riesz) : $(E, \|\cdot\|)$ ev normé, $H < E$ fermé, $H \neq E$] ④
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in S(0,1)$ tq $d(x, H) \geq 1 - \varepsilon$

THM$_{17}$? LASSE ⟵ juste mettre thm de Riesz + les corollaire après ! [LI]
1) dim finie, 2) Toutes normes éq, 3) $\forall \|\cdot\|_E$ et $\forall$ forme lin sur E φ, φ continue
4) Pour $\forall$ norme, S_E (et B_E) sont compactes
5) Compacts de $(E, \|\cdot\|)$ sont les fermés bornés

⑤ Thm Riesz

Rem : $\boxed{1 \Leftrightarrow 5}$ constitue le thm de Riesz (1918)

Cor$_{18}$: Un ev de dim fini est complet et donc fermé.

[LI] p 17

Cor$_{19}$: Soit $T : E \to F$ linéaire ~~continue~~, ~~est~~ T est continue.

II) Espaces de Banach

A) Définitions - 1ère prop : E ev normé

[LI] p. 9 – 14 + p. 19 – 20

Déf$_{20}$: suite de Cauchy + espace de Banach

Ex$_{21}$: • $\ell_p^n = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ Banach, $\forall 1 \leq p \leq +\infty$
• c_0, ℓ_p complets

~~Pour K com~~

Prop$_{22}$: Soit X un ensemble, E ev normé complet et $\|\cdot\|_\infty$: $\left| \begin{array}{l} \mathcal{C}_b(X,E) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f \longmapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E \end{array} \right.$
$(\mathcal{C}_b(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ complet

Rem$_{23}$: On a alors $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ complet muni de $\|\cdot\|_\infty$
MAIS $\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_1)$ non complet

Prop$_{24}$: F ev normé complet, $L(E,F)$ complet muni de $|||\cdot|||$ norme d'opérateur

THM$_{25}$: Thm de prolongemt des applicat° lin continues de $A \to F$, avec A ssev dense de E, et F complet

Rem$_{26}$: Ce thm est un cas part. du thm de prolongemt des fct unif continues de $A \to F$ avec F complet, $\bar{A} = E$.

THM$_{26}$: E complet $\Leftrightarrow$ Toute série absolumt CV est CV dans E

Plan détaillé $\boxed{208}$ suite

II) B) Exemple des espaces L^p : On note $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré

Déf28 : $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ $p \in [1; +\infty[$ et $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

THM29 : $\neq$ de Hölder] ⑥
$\neq$ de Minkowski

Rem30 : · Hölder $p=q=2 \to \neq$ de C-S
· $\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p$ car $\int_\Omega |f|^p d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-p.p

Déf31 : ~~De~~ $L^p(\mu)$ [RUD]

THM32 : déf $\|\cdot\|_p$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ev normé $p \in [1; +\infty]$

Ex33 : Si μ mesure de comptage, $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \ell^p$ vu avant

Prop34 : si $\mu(\Omega) < +\infty$, $\forall 1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$, $\mathcal{L}^{p_2}(\mu) \subseteq \mathcal{L}^{p_1}(\mu) \subseteq L^1(\mu)$

THM35 : ~~$\forall p \in [1; +\infty]$, $L^p(\Omega, \mu)$~~
Riesz - Fischer] [RUD]

C) Thm de Baire et conséquences : $(E, \|\cdot\|)$ ev normé

THM36 : (Baire) les 2 versions

Rem35 : aussi valable dans un espace métrique complet

Appli36 : Thm de Banach-Steinhaus] ⑦ [LI] p. 111 - 119

THM37 : Thm de l'application ouverte] ⑧

Cor38 : E, F 2 Banach $T : E \to F$ lin cont. bij. Alors T^{-1} continue] ⑨

Appli37 : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ non surjective] ⑩

Appli38 : Un espace de Banach de dim ~~fini~~ infini n'admet pas de base algébrique dénombrable.

III) Applications : 2 exemples :

A) Hilbert et projection :

Déf39 : espace préhilbertien + Hilbert

Ex40 : $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, ℓ^2, ~~$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$~~

Prop41 : id du prlgm] [HIR] ou [LI] p 32 - 34

THM42 Project° sur CVX fermé Dév 1] [HIR]

Prop43 : $P_C : H \to C$ est 1 - Lip donc continue

~~Ex43 : en dim finie P_F~~

[HIR] ou [LI] p. 32 - 37

THM44 : Project° sur ss ev fermé, $P_F : E \to F$ linéaire + caractérisation

Conség45 : $F < H$ fermé, $H = F \oplus F^\perp$

Cor46 : $F^{\perp\perp} = \overline{F}$, et F dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$

Ex44 : en dim finie (pour F) $(e_1, \dots, e_p)$ base de F, $P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x | e_i \rangle e_i$.

THM45 : Représentat° de Riesz

B) L'application linéaire transformée de Fourier :

[ElAmF] ou [LI] p. 90 - 100

Déf46 : $T.F : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ applicat° lin. continue & + notat°
Lemme de Riemann-Lebesgue ⑪

Prop47 : $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$

Déf48 : noyaux de Gauss

Prop49 : $\widehat{\gamma_\varepsilon} = \dots$, $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ approximation de l'unité

THM50 : Fourier-Plancherel Dév 2

Appli51 : calcul d'une $\int$? aller voir dans [RUD] ?

Réf : [LI] - LI - Cours d'analyse fonctionnelle
[GOU] - Gourdon Analyse ⟵ on peut peut-être s'en passer
[ROM Al] : Rombaldi algèbre
[ROM] : Rombaldi - Analyse
[RUD] - Rudin
[HIR] - Hirsch ...
[ElAm_F] - El Amrani - Analyse de Fourier