17an|206| Dim finie en Analyse

I) Topologie d'un e.v.n. de dim finie :

A) Généralités sur la dimension. K corps, E K-ev, $E \neq \{0\}$

Déf₁: E de dim finie

THM_2: Si E de dim finie, il admet au-une base, toutes les bases de E ont même nombre (fini) d'éléments. (1)

$Déf_3$: $dim_K(E) = \#$ base

THM_4: 2 K-ev de dim finie sont isomorphes $\Leftrightarrow$ ils ont m̂ dim

$Prop_5$: E de dim finie $n \geq 1$. Une famille libre est $|.| \leq n$; elle a n élém^t $\Leftrightarrow$ c'est une base
gén $|.| \geq n$

THM_6: E de dim n, $F < E$ non nul. F de dim finie $\leq dim_K(E)$; et $E = F \Leftrightarrow dim_K(F) = n$. (2)

THM_7: base incomplète.

[ARN] p. 378 - 384

B) Equivalence des normes et appli lin. continues : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E $\mathbb{K}$-ev de dim n finie

THM_8: Toutes les normes sont éq.

Rem_9: Thm₈ utile pour prouver la continuité d'applications (linéaires) car on peut choisir une norme simplifiant les calculs.

Exo_{10}: Les normes subordonnées de matrice/appli lin sont parfois + pratiques à manipuler + redonner déf

Cor_{11}: $\forall$ T: E→F lin, où F evn, T continue.

$Lemme_{12}$: Lemme de Riesz

THM_{13}: Thm de Riesz [le mettre en $\Leftrightarrow$] genre. E de dim finie $\Leftrightarrow$ il possède une boule fermée compacte $\Leftrightarrow \overline{B(0,1)}$ compacte

Cor_{14}: Les compacts de E sont les fermés bornés

Ex_{15}: $O_n(\mathbb{R})$ compact de $M_n(\mathbb{R})$ ♥

Cor_{16}: • Tout ev de dim fini est complet
• Tt ss-ev de dim fini est fermé dans E

Rem_{17}: Si E de dim ∞, contre-ex : $S_0: f \in \mathcal{C}([0,1]) \mapsto f(0) \in \mathbb{K}$ continue pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour la $\|\cdot\|_1$.

$Lemme_{18}$: Toute suite à valeurs dans un compact (de bornée en dim finie) admettant une unique valeur d'adh, converge vers cette valeur

$Lemme_{19}$: $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \rho(A)$ où ρ est le rayon spectral de A

[I] p. 15 - 21

[CAL] $Appli_{20}$ [application du Thm₈ et cor₁₄] : $exp: S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéomorphisme. Dév 1

[I] ex p. 21 $Appli_{21}$: F ss-ev fermé de E, où F de dim finie (E pas forcément) $\forall a \in E$, $\exists x_0 \in F$, $d(a,F) = \|a - x_0\|$.

II) Applications de la dimension finie dans différents domaines d'analyse :

A) Polynômes de Lagrange : $\mathbb{K}$ corps quelconque

[BEC] p. 154 THM_{22}: $p \in \mathbb{N}^*$, $\{a_1, ..., a_p\} \subseteq \mathbb{K}$ (2 à 2 ≠) et $b_1, ..., b_p \in \mathbb{K}$, $\exists! P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tq $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $P(a_i) = b_i$.

Plus précisément $\varphi: \begin{vmatrix} \mathbb{K}_{p-1}[X] \to \mathbb{K}^p \\ P \mapsto (P(a_1), ..., P(a_p)) \end{vmatrix}$ isomorphisme.

[ROM] p. 207 Rem_{23}: On peut obtenir la forme explicite de ce polynôme :
$P = \sum_{i=0}^{p} b_i L_{p,i}$ où $L_{p,i} = \prod_{j=0, j\neq i}^{p} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$.

♥ CAL $Appli_{24}$: Pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tq $A = Q(\exp A)$ (où $\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ série CV dans M_n) (sert dans le dév 1)

♥ ~~ton~~ • Toute fonction de $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ est une ~~polynôme~~ fct polynomiale. ($\mathbb{F}_q$ corps fini)

B) Projection dans un espace euclidien ou dans un Hilbert : (H, Hilbert)

- a chercher dans [HIR]

• THM de project° sur cvx fermé dans Hilbert (+ KR)

• Cor : la project° sur ss-ev fermé ; p_F linéaire ...

• Rem : On peut toujours projeter sur un ev de dim finie car il est complet et on a l'expression du projeté

THM : expression de p_F en fct d'une b.o.n de F [B

Ex : Trouver exo où on détermine $\inf_b \left\{ \int_0^1 f(t)[at+b] dt \mid a,b \in \mathbb{R}^2 \right\}$ où $f \in \mathcal{C}([0,1])$ fixée...
(sinon mettre des exs simples)

[ROM] [HIR] ou [FGN] Rem : Dans le cas d'un Hilbert séparable, on peut construire une base hilbertienne et avoir une expression similaire ...

Plan | 206 | suite : dim finie en An

II) B) Appli en calcul diff :

- lien $df_a \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$ + contre ex
- Schwarz Hessienne
- extrema libres dim 2
- ss-var - esp tang - extrema liés

déf J_a ? Rem plus pratique pour TIL + fct imp de regarder J ?

Rem33: $f: E \to F$, E, F Kevn. Pour E, F de dim quelconque, l'existence et la valeur de df_a ($a \in E$) dépend de $\|.\|_E$, $\|.\|_F$. En dim finie non ; de +, la continuité de df_a est automatique car linéaire

$\to E = \mathbb{R}^n$

Déf34: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}$

Prop35: f diff en $a \in U$, $\forall i$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe et $df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*$

(e_i^*) : base duale, de $(\mathbb{R}^n)^*$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$

THM36: Si dérivées partielles existent et sont continues, f diff en a et

Contre ex 36

THM37: Schwarz + corollaire en vrai tps.

Contre ex38: ex 1 GOU

Déf39: Matrice Jacobienne + Jacobien

Rem40: Pour vérifier les hyp du TIL ou fct implicites, il est + facile de travailler sur $Jac_a(f)$ plutôt que sur df_a certaines fois.

Déf41: Pour $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, matrice Hessienne

THM42: extremums libre en remplaçant Q par A

Ex43: En dim 2 il suffit de regarder la $tr(A)$ et $\det A$

Déf44: sous-variété (+ espace tangent)

Lemme45: déf éq ss-variété avec les $(dg_i)_a$ ...

Lemme46: 1er lemme dév

THM47: Extrema liés — Dév2

Rem48: ex [ROU] avec cercle (ou ellipse de Le Merdy)

Appli49: diago des endo auto-adjoints) ④
(+ ≠ Arithmético-géom [ROU])

[GOU] p. 324 323

[GOU]

[GOU] p 336

[LAF] [ROU]

[AVEZ] [ROU]

[BEC]

D) Equations diff. lin. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle

(E) $Y' = A(t)Y + B(t)$ avec $A: I \to M_n(\mathbb{K})$, $B: I \to \mathbb{K}^n$ continues

(H) : $Y' = A(t)Y$

THM50: C-L lin

THM52: S_H ss ev de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dim n et ϕ ... isom. + $S_{(E)}$ espace affine

Déf53: Wronskien + système fond. de sol

Thm54: $(V_1, ..., V_n)$ syst. fond de (H) $\Leftrightarrow \forall$ $W(...) \neq 0$ $\Leftrightarrow \exists t_0$ $W(...)(t_0) \neq 0$

Ex55: $y'' = \omega y$ ⇝ syst fond $(\cos(\omega .), \sin(\omega .))$

Appli56: Méthode de variat° de la cste

→ Cas particulier des coeff cst : (H) : $Y = AY$ où $A \in M_n(\mathbb{K})$

THM57: sol : $t \mapsto e^{tA}V_0$, $V_0 \in \mathbb{K}^n$, $e^{tA} = \sum \frac{(tA)^k}{k!}$

Rem58: Pour calculer e^{tA} on peut utiliser la décomposition de Dunford

• Réduire A peut également permettre de calculer e^{tA} ou directement de simplifier l'équation (H).

Ex59: $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$ diagonaliser la matrice associée permet de trouver comme solution gén. $\left\{ t \mapsto \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{it} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma e^{-it} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \right.$

Prop60: (E) : $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$
Les solutions de (E) sont les $\left[t \mapsto \sum_{i=1}^{k} e^{r_i t} P_i(t) \right]$ où $P = X^n + \sum_{i=1}^{n} a_i X^{n-i}$ est le polyn. KR de (E), de racines $(r_i)_{i=1}^{k}$, de multiplicité $(m_i)_{i=1}^{k}$, et les P_i sont des polyn. de d° < m_i

Ex61: (H) : $y'' + ay' + by = 0$, $P = X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$.

- Si P a 2 racines distinctes r_1, r_2, les sol sont $t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$
- Si P a 1 racine double r, $t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt}$.

Réf : [ARN1] I) A) ← Alg - Arnaudiès

[LI] - Cours d'An. fct I B)

[BEC] - Beck C-A II) A + II) B)

[HIR] - Hirsch II B

[GOU] - Gourdon An. II C + D

Dév 1) [CAL-N]

2) [LAF] + [ROU] + [AVEZ] + [BEC]