Leçon [205] : Espaces complets. Exemples et applications.

→ Rapport de jury :

- ☒ Fournir des thm d'existence
- ☒ Exemples d'espaces complets usuels
- ☐ Bien maîtriser la CV uniforme
- ☒ Thm du pt fixe
- ☒ Thm de Cauchy-Lipschitz
- ☐ Parler des ℓ^p ou L^p
- ☐ Thm de Baire si c'est avec des applicat° pertinentes et maîtrisées
- ☐ Existence de fct continues nulles part dérivables (preuve constructive aussi sans Baire)
- ☐ Construction de $H_0^1(]0,1[)$ + applicat° sur l'intérêt de cet espace

Dév	Réf
Riesz-Fischer	Rudin
Project° sur CVX fermé	Hirsch

- [HAS] : Hassan - Topologie générale et espaces normés
- [GOU] : Gourdon - Analyse
- [RUD] Rudin
- [LI] : Li - Cours d'analyse fonctionnelle
- [ELAm_F] El-Amrani - Analyse de Fourier
- [HIR] Hirsch - Éléments d'analyse fonctionnelle
- [QUE] - Queffélec - Topologie
- [POM] - Pommellet - Cours d'analyse
- [BRE] - Brezis - Analyse fonctionnelle

Idée plan :

I) Espaces complets et suites de Cauchy : [HAS] + [GOU]

A) Suites de Cauchy
I.6 Déf, exemples + prop sur suites de Cauchy

B) Espaces complets
II.6 déf, exemples $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, pas $\mathbb{Q}$

C) Propriétés des espaces complets
VI.1, 3 + 4 + 5 ↳ Thm de Cantor, espaces averte

II) Exemples particuliers : espaces de Banach : [RUD] [LI]? [HAS]

A) Espaces de Banach
déf, ex Δ ~ $(B_c(X,\mathbb{K}), \|\,\|_\infty)$ + $L(E,F)$ + L^p, $\|\,\|_p$ norme + $\boxed{\text{Riesz-Fischer}}$ ← Dév 1

B) ~~Thm~~ Espaces de Hilbert [HIR] + [HAS]?
Déf + $\boxed{\text{Thm de project°}}$ Dév 2 + prop P_F + Riesz + ~~adjoint~~ ?

III) Quelques applications de la not° de complétude

A) Thm de Prolongement [HAS] [ELAm_F] [POM]?
Thm fct unif cont + corollaire appli lin + $\boxed{\text{Fourier-Plancherel}}$

B) Thm de pt fixe [GOU] [QUE] [ELAm]?
Thm + exemples + étude de $u_{n+1}=f(u_n)$ + Cauchy-Lipschitz Global

C) Thm de Baire (si y'a le tps) [LI]? [BRE]? [GOU]?
déf + thm
↳ applicat° cruciale → $\mathcal{F}: L^1_{2\pi} \to c_0(\mathbb{Z})$ non surjective
↳ Banach-Steinhaus ...

Plan détaillé [205]. Espaces complets

(E,d) espace métrique

I) Espaces complets et suites de Cauchy :

A) Suites de Cauchy :

[HAS] p. 88-89

Déf 1 : suite de Cauchy

Prop 2 : 1) suite CV est de Cauchy
2) suite de Cauchy est bornée
3) ss-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy

Ex 2 : $(\frac{1}{n})_n \subset]0;1[$ de Cauchy mais non CV dans $(]0,1[, |.|)$

Prop 3 : suite de Cauchy CV $\Leftrightarrow$ elle admet une ss-suite CV
· $\forall (\varepsilon_k)_k$ nbres réels >0, $\exists (x_{n_k})_k$ ss-suite tq $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \varepsilon_k$

Prop 4 : $f:(X,d) \to (X',d')$ fct unif continue. $(x_n)_n \subseteq X$ de Cauchy, alors $(f(x_n))_n \subseteq X'$ de Cauchy

B) Espaces complets :

[HAS] p. 89-92

Déf 5 : espace complet + ss-ensemble complet

Ex 6 : $(\mathbb{R}, |.|)$ complet, $(\mathbb{Q}, |.|)$ non complet
· (X,d) espace métrique discret ($d(x,y) = \delta_{x,y}$) est complet car suite de Cauchy dans X est stationnaire

Rem 7 : ⚠ $\mathbb{R}$ homéomorphe à $]-1;1[$ via $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{1+|x|} \in]-1;1[$
or $\mathbb{R}$ complet, pas $]-1;1[$

Prop 8 : (X,d), (Y,d') 2 esp. mét, $f: X \to Y$ homéomorphisme. Si f est unif. continue et Y complet, X est complet

Prop 9 : $A \subseteq X$, · A complet $\Rightarrow$ A fermé dans X
· $\overline{A} = X$ avec $A \neq X \Rightarrow A$ non complet
· X complet et A fermé dans $X \Rightarrow A$ complet

Ex 10 : $[0;1]$ complet

Prop 10 : $(X_i, d_i)_{i=1}^{p}$ espaces mét complets. $X = X_1 \times \dots \times X_p$ complet muni d'une distance produit.
Par ex : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ complets.

THM 11 : Thm de Cantor : (X,d) espace métrique. LASSE
1) (X,d) complet
2) Pour $(F_n)_n$ suite ↓ de fermés non vides tq $\text{diam}(F_n) \to 0$, Alors $\exists! x \in X$ tq $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$

Rem 12 : l'hypothèse $\text{diam}(F_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ est essentielle :
$F_n = [n;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ complet est une suite ↓ de fermé non vide, d'intersect° vide.

[HAS] p. 93

~~THM 13 : (Prolongement) $f: X \to Y$, $A \subseteq X$ dense, f unif continue f se prolonge de manière unique~~

~~Rem 14 : f unif continue essentielle $f: x \in [0;1[\mapsto \frac{1}{1-x} \in \mathbb{R}$ continue, $[0;1[$ dense dans $[0;1]$, f ne se prolonge pas par continuité.~~

[GOU] p. 25

Prop 15 : (E,d), (F,d') 2 esp mét. (E,d) complet, $f: E \to F$ continue
$(E_n)_n$ suite ↓ de fermés non vides tq $\text{diam}(E_n) \to 0$, alors
$$f\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n\Big) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(E_n)$$
②

+ exo [GOU] p 26 sur complété d'un espace mét ? ③

II) Exemple important : les espaces de Banach :

A) Espaces de Banach ← Ex. et appli

On note $(E, \|.\|)$ un ev normé

[GOU] p. (+ [LI])

Déf 16 : espace de Banach

Ex 17 : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $(c_0, \|.\|_\infty)$, $(\ell^p, \|.\|_p)$

Prop 18 : Tout espace v. n. de dim finie est complet (et donc fermé)

Prop 19 : Soit E, F 2 evn, on note $L(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues, on le munit de la norme : $|||f||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$
· Si F complet, $L(E,F)$ est un Banach

Rem 19 : Cela implique que $\forall E$ evn E^* son dual topologique, est un Banach
→ Une application importante :

[LI] p. 20

Prop 20 : E complet $\Leftrightarrow$ toute série abs. CV est CV

[GOU] p. 49

Csq 21 : E Banach, $u \in \mathcal{L}(E,E)$ tq $|||u||| < 1$. Alors $Id - u \in GL(E)$ d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in L(E)$

Csq 22 : $GL(E)$ est un ouvert

[GOU] p. 21

Prop 23 : X ens. E evn $B(X,E)$ = fct bornées de X dans E, on munit cet espace de $\|.\|_\infty : f \mapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E$. Si E est complet, $B(X,E)$ aussi !

Plan détaillé [205] suite

)A) $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espace mesuré

Déf24 : $\forall p \in [1;+\infty[$, $\mathcal{L}^p(\mu) = \ldots$ + déf $\|\cdot\|_p$ — $L^p(\mu)$ = l'espace $\mathcal{L}^p(\mu)$ quotienté par la relat° d'ég $= \mu$-pp. [HIR] p 124 – 125

Ex25 : ℓ_p, ...

Déf25 : $\mathcal{L}^\infty$ et L^∞ + déf $\|\cdot\|_\infty$ — $\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable $| \exists M>0, |f(x)| \leq M$ μ-pp$\}$

Prop26 : $\neq$ de Hölder ; $\neq$ de Minkowski [RUD]

Prop27 : $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ev. normé

THM28 : Riesz-Fischer — Dev 1

B) Espaces de Hilbert — $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

[HIR] p. 84 – 86

Déf29 : espace de Hilbert = $\mathbb{K}$ ev muni d'un p.s. (réel ou cplx) et complet

Ex30 :
- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ muni des p.s. canoniques
- $\mathcal{C}_{2\pi}$ muni de $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$
- $L^2(\mu)$ d'où en particulier ℓ_2 (via Riesz-Fischer)

Prop31 : id du prlgm [HIR] p. 87

THM32 : Projection sur un CVX fermé — Dev 2 [HIR] p. 91

Rem33 : la complétude fournit l'existence du projeté + rem il suffit que C soit complet

Ex33 : mettre un exemple ?

Prop32 : P_C 1-lip dc continue [HIR] p. 91 – 97

Prop33 : project° sur un ss-ev fermé + corollaire $E = F \oplus F^\perp$

Csq34 : forme project° $\perp$ sur F ev de dim finie...

Csq34 : Thm de représentation de Riesz (4)

Rem35 : permet de définir opérateur adjoint (T^*), des résultats d'existence

III) Applications de la complétude :

A) Thm de point fixe :

[GOU]

THM36 : Pt fixe

Rem37 : Thm devient faux si on a juste $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ $\forall x \neq y$

~~ex sin sur]0,~~

Appli37 : Soit $(u_n)_n$ suite réc définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si f est continue et $(u_n)_n$ CV vers ℓ, ℓ est un point fixe de f

Rem38 : cela peut permettre de trouver des limites de suites

Appli38 : Thm de Cauchy-Lip global + Thm de Cauchy-Lip local + rem on utilise un thm de pt fixe sur un espace complet pour obtenir l'existence de la solution [BERT] ou [GOU] p. 375

B) Thm de prolongement :

Rem39 : Ici la complétude nous fournit l'existence d'un prolongemt.

THM40 : Prolongem^t fct [HAS] p. 93 ou [GOU]

Rem41 : ⚠ unif cont essent

THM42 : Prolongement d'appli linéaire continues avec $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ ≈ [RUD] ou [ElAmF] ...

Csq43 : Thm de Fourier Plancherel $\forall f \in L^1 \cap L^2$, $\hat{f} \in L^2$ et $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$, $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ se prolonge de manière unique en une 2π-isométrie surjective $\mathcal{F}_2 : L^2 \to L^2$ (définir $\mathcal{F}$ avant...)

C) Thm de Baire et csq

THM44 : Thm Baire + énoncé équivalent (5) [LI] p. 111 – 114

Csq45 : Thm de Banach-Steinhaus (6)

Appli46 : existence d'une fct $\in \mathcal{C}([0;1])$ tq $f(0) = f(1)$ dont la S.F. DV en un pt $x \in [0;1]$ (7) [LI] p. 121

Appli47 : Un ev de Banach de dim infini n'admet pas de base algébrique dénombrable [LI] p. 119

[LI] (+ si tps : Thm de l'application ouvert, isomorphisme $T \in \mathcal{L}(E,F)$... + csq $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ non surjective + graphe fermé) (8)

Réf :

- [HAS] - Hassan El Hage - Topologie générale et espaces normés
- [GOU] - Gourdon - Analyse
- [HIR] - Hirsch - Élém^{t} d'analyse fct
- [LI] - Cours d'analyse fct

([RUD] : Riesz-Fischer) / [BERT] Berthellin (C-L glob) / [ElAm_F] ($\mathcal{F}_2 : L^2 \to L^2$))