Leçon $\boxed{203}$ Utilisation de la compacité

I) Caractérisations de la compacité et 1ères utilisations :

A) Généralités : (E,d) espace métrique

[GOU] p. 28

Déf1 : espace compact (avec recouvrement ouverts)

Ex2 ...) ceux [GOU] + prop2' : $(x_n)_n$ suite CV vers ℓ, $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}\cup\{\ell\}$ compact] p. 31

Prop3 : compact ⇒ borné

THM4 : $(F_n)_n$ suite de fermés non vides ; décroissante ; dans un compact, alors $\bigcap F_n \neq \emptyset$

Rem5 : On a le m̂ thm dans un complet mais en rajoutant $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$

[GOU] p 229 Appli6 : 1er thm de Dini

B) Bolzano-Weierstrass et csq :

[GOU] p 30

THM7 : B-W

Cor8 : (E,d) compact ⟺ toute suite de E admet au − une valeur d'adh.

⟺ Toute partie infinie de E admet au − 1 pt d'accumulat°

[POM] p 55 ou [POM] 56 Appli9 : Les compacts de ℝ sont les fermés bornés

[GOU] 30 Prop10 : compact ⇒ complet

THM11 : $(x_n)_n \subseteq (E,d)$ (compact) CV ⟺ elle admet une unique valeur d'adh.

[POM] p 55 ~~Ex~~ Appli12 : E, F 2 esp. mét, F compact, f : E → F. ← ⚠ faute de frappe dans POM.

f continue (ssi) Graphe(f) fermé dans E×F

[GOU] 30 Prop13 : Produit fini d'esp mét compact ⟺ chaque espace est compact

App14 : Les compacts de $\mathbb{R}^n$ (muni de la distance produit usuelle) sont les fermés bornés.

II) Fonctions continues sur un compact :

A) Compacité et extrema : (E,d), (F,δ) esp mét non vides

[POM] p. 56

THM15 : $f : E\to F$, E compact. Si f continue, f(E) partie compacte de F

Csq16 : $f : E\to F$ continue, bijective, avec E compact. Alors f homéom.

THM17 : $f : E\to\mathbb{R}$ continue, E compact, Alors f bornée et atteint ses bornes.

Appli18 : $\mathcal{C}(E,\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$ (où E compact) et donc muni de $\|\cdot\|_\infty$, $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ Banach

[POM] p 251 Appli19 : Thm de Rolle + T.A.F.

[POM] p.56 Appli20 : $A \subseteq E$ compact non vide,

a) $\exists x\in A$ tq $d(y,A) = d(x,y)$, $\forall y\in E$

b) $\exists a,b\in A$ tq $d(a,b) = \mathrm{diam}(A)$

B) Thm de Heine :

[POM] p. 61-62

THM21 : Heine

Ex22 : ① $f : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue périodique est unif cont.

② $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont. admettant des limites finies en $\pm\infty$ est unif. cont.

Appli23 : $f : [a,b] \to E$ continue (E e.v.n.) est lim. unif de fct affines par morceaux.

[GOU] 229 Appli24 : 2e thm de Dini (+ ex venant de HIRSCH sur poly CV unif vers 1.1 ?)

[QUE] ou [POM] pas l'idée Appli25 : • Pour $f\in\mathcal{C}^0_{2\pi}$, $\sigma_N(f)\xrightarrow[N\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} f$ (où $\sigma_N(f)$ est la somme de Fejér de f) ← Thm de Fejér

• Pour $f\in L^p_{2\pi}$ (ou $\mathcal{C}^0_{2\pi}$), $x\mapsto \tau_x f$ est uniformément continue ($\tau_x f(t) = f(t-x)$)

THM26 : Bernstein-Weierstrass (+ appli $\int_0^1 t^n f(t) = 0 \Rightarrow f = 0$ ....)

[QUE] THM27 : densité fct continues nulle part dérivables dans $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$

Dév 1

C) Théorème de points fixes :

[GOU] p. 35-36

THM28 : (E,d) compact, $f : E\to E$ tq : $\forall x\neq y\in E$, $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$. Alors f admet un unique pt fixe.

Ex28' $f = \sin$ sur $[0,1]$

Rem29 : Si on prend $x_0\in E$ quelconque et : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = f(x_n)$, alors $x_n \to$ pt fixe de f

Rem30 : Si E est juste complet, le résultat devient faux :

$f : \begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \begin{cases}1 & \text{si } x<0\\ x+\frac{1}{1+x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}\end{cases}$ continue sans pt fixe

~~Prop31 : (Isométrie d'un compact) (E,d) compact, f : E → E continue tq : ∀(x,y)∈E², d(f(x),f(y)) ≥ d(x,y), alors f est une isométrie (bijective en plus...)~~

[GOU] p 51 THM32 : K compact convexe d'un evn, $f : K\to K$ continue tq : $\forall (x,y)\in K^2$, $\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|$. Alors f admet (au −) un pt fixe

à quoi servent tous ces thm de point fixe au juste ??

[POM] + Rem33 : Généralisation : thm de Brouwer

Leçon $\boxed{203}$ Suite : (Compacité)

III) Compacité dans les e.v.n. : $(E, \|\cdot\|)$ e.v.n.

on peut retrouver les idées dans [ROM] mais organisat° ≠

A) En dimension finie : E de dim finie

[HAS] p. 340 - 343

Thm 33 : Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Rem 34 : Pour montrer la continuité d'une fonction sur des evn de dim finie, le choix de la norme n'a donc pas d'importance, on choisit la plus pratique pour le raisonnement.

~~Lemme 35 $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \rho(A)$~~ [ROM AL]

~~THM 36 : $exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. Dév 2~~ [CAL.N]

Prop 37 : • Toute appli. lin de E dans un evn est continue

Prop 38 : • E est un Banach
• Tout ss ev de E est fermé

THM 39 : (Riesz) $(E, \|\cdot\|)$ e.v.n. LASSE
① E de dim finie ⟺ ② $\overline{B(0,1)}$ compacte dans $(E, \|\cdot\|)$ ⟺ Les compacts de E sont les fermés bornés de E.

Appli 39 : $O_n(\mathbb{R})$ compact.] [ROM AL] + déc polaire sur $M_n(\mathbb{R})$

Lemme 35 : $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \rho(A)$ + $\begin{matrix} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++} \to Gl_n \text{ homéom} \\ (O,S) \longmapsto OS \end{matrix}$ [ROM AL]

Lemme 36 [Rappel] : Si $(x_n)_n \subseteq E$ est bornée et admet une unique valeur d'adhérence x, alors elle CV vers x. [GOU] 30

Appli 38 : $exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéomorphisme Dév 2 [CAL.N]

B) Résultats (+ généraux) sur les espaces de fonctions continues définies sur un compact : (X,d) compact

[HIR]

Parler du thm de Stone-Weierstrass + 1 ou 2 applis si on est motivé

Déf 40 : équicont + unif. équic

Prop 41 : Sur $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$, équic ⇒ unif équic $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$

Prop 42 : $(f_n)_n \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ équic ; $D \subseteq X$ partie dense. Si $f_n \xrightarrow{s} f$ sur D, alors $f_n \xrightarrow{u} f$ sur X

THM 43 : Ascoli

Rem 44 : Thm ↗ généralement utilisé pour montrer qu'un op. est compact

Ex 45 : X ; esp. mét compact, $K \in \mathcal{C}(X \times [0;1])$, alors $T : \left| \begin{array}{l} \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}(X) \\ f \longmapsto [x \mapsto \int_{[0;1]} f(y) K(x,y)\,dy] \end{array} \right.$ est un opérateur compact.

Réf :

[GOU] - Gourdon - Analyse

[POM] - Pommellet - Cours d'Analyse

[ROM] - Rombaldi - Éléments d'analyse réelle

([HAS] - El Hage Hassen - Topologie) ← on peut s'en passer large

[HIR] - Hirsch

Dév : 1) densité f.c.n.d. dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$: [QUE]

2) $exp : S_n \to S_n^{++}$ homéom : [CAL.N]. ↑ nouvelles histoires hédonistes