Plan détaillé [201] Suite

III) Cas particulier de L^2 : ← peut être résumé en II C) et III) Autre espaces de fct genre fct holomorphes...

A) $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et Fourier-Plancherel :

[ElAm-F]

THM 40 : Fourier-Plancherel (tout comme mon dév)

Rem 41 : On a une théorie de $T.F_2$ + symétrique sur L^2, on voit que f et $\mathcal{F}_2(f)$ jouent le même rôle.

Rem 42 : en terme de p.s. F-P se traduit par $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$

Appli 43 : Calcul de $\int \frac{\sin^2 t}{t^2}$, $\int \frac{\sin^4 t}{t^4}$

Prop 44 : formule de dualité dans $L^2(\mathbb{R})$

Prop 45 : convolut° et $T.F_2$

B) Cas de $L^2_{2\pi}$ et les série de Fourier :

[ElAm-F]

Déf 46 : $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur $L^2_{2\pi}$ + $\|\cdot\|$

~~Déf 47~~ ~~Déf en~~ Déf-Prop 47 : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ + famille orthonormée

Déf 48 : $c_n(f)$, si $f \in L^2_{2\pi}$, $\langle f, e_n \rangle$, déf $S_n(f)$, D_n ← noyau Dirichlet

Prop 49 : $S_n(f) = D_n * f$

Déf-Prop 50 : K_n, $\sigma_N(f)$; prop K_n + $\sigma_N(f) = K_N * f$

THM 51 : Fejèr

Csq 52 : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$

THM 53 : Formule de Parseval et isométrie surj. $\begin{array}{l} L^2_{2\pi} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f \longmapsto (\langle e_n, f \rangle)_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$

[BEC]

Appli 54 : calculs de sommes cf [GOU] ou [BEC]

[FRA.An...]

Rem 55 : en combinant ces résultats avec la convergence ponctuelle de $(S_n(f))_n$ vers f (thm de Dirichlet) on peut montrer : [Dév éq. de la chaleur]

C) Cas $L^2(I, \rho)$: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle

[ElAmF]

Déf 56 : fct poids, $L^2(I,\rho)$ + p.s dessus.

Prop 57 : existence - unicité polyn ⊥ (unitaires)

Ex 58 : Hermite ; Legendre, Laguerre] + [BEC]

Prop 58 : meilleur approx de f dans $\mathcal{P}_N$ (avec $\|\cdot\|_\rho$) + [BEC]

Prop 60 : si I borné, polyn. ⊥ base hilb.) à vérif !!! ⚠

Rem 61 : plus vrai si I non borné : $\omega(x) = x^{-\ln(x)}$

[BEC]

THM 62 : Densité polyn ⊥ (cf dév)

Rem 63 : polyn. de Hermite permettent d'avoir une base hilb. de $\begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}) \\ L^2(\mathbb{R}_+) \end{array}$

Réf : [GOU] Analyse

[HIR]

[QUÉ] Analyse pour l'agrég.

[BRI]

[ElAm-F]

[BEC]

Dév : 1) Densité fct CND [QUÉ]

2) Riesz-Fischer [RUD].

Plan détaillé 201 : Espaces de fct

I) Espaces de fonctions continues

[Si vous faites un I + simple ou mieux dites le moi svp]

A) Généralités : (X,d) espace métrique, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

[GOU] p 12-13

Déf$_1$: fct continues de $X\to\mathbb{K}$ (ou entre 2 espaces métriques)

Déf$_2$: unif. cont + ex$_2$: fct lip., $x\mapsto 1/x$ continue mais non unif. (pas trop utile ?)

Rem$_3$: unif. cont. $\Rightarrow$ continuité

Prop$_4$: $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ est un e.v. sur $\mathbb{K}$ (avec déf $fg(x)=f(x)g(x)$)

Dans la suite $\boxed{(X,d)\text{ compact}}$

[HiR] p.24-25

Déf$_5$: $\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)|$ ($<+\infty$ car fct continue sur compact bornée)

THM$_6$: $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ Banach muni de $\|\cdot\|_\infty$ + rem$_6$: le thm de Baire s'applique sur $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ — sert au dév 1 et le thm de point fixe dans Cauchy-Lipschitz $\varphi:\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n)\to\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$

[GOU]

THM$_7$: Heine ("réciproque" de rem$_3$)) pas trop utiles ?

~~Rem~~ Peut-être rajouter Dini (HiR)

B) Parties compactes : ← peut-être juste enlever cette partie !

[HiR] p.37-39

Déf$_8$: équicontinuité + uniforme équic.

Ex$_9$: {fct k-lip} équicontin.

Prop$_{10}$: $(f_n)_n\subseteq\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ suite équicont, $\overline{D}=X$, si $\exists f$, $f_n\xrightarrow{s} f$ sur D, alors $f_n\xrightarrow{unif} f$ sur X et $f\in\mathcal{C}(X)$

THM$_{11}$: Ascoli

Ex$_{12}$: opérateur $Tf: x\mapsto\int_X K(x,y)f(y)\,dy$ (à définir) vérifie $T(\overline{B(0,1)})$ partie relativement compacte de $\mathcal{C}(X)$... (T est dit opérateur compact)

(Savoir qu'il sert au thm de Montel + Thm Cauchy-Arzela-Péano...) ← cf [QUE] ← connaître énoncé ou pas les mettre

C) Parties denses :

[QUE] p 218

THM$_{13}$: Bernstein-Weierstrass

[GOU] 306

Appli$_{14}$: $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ continue tq $\forall n\int t^n f(t)=0$ alors $f=0$

[QUE]

THM$_{15}$: Densité fct continues nulle part dériv. dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ Dév 1

[GOU] 86

Rem$_{16}$: construction explicite] [GOU] exo 9 p 86
+ reprendre oral Coco pour voir comment on prouve thm$_{15}$ à partir de l'existence de cette fct) OK : utilise Weierstrass et si fCND, P+λfCND"

[HiR] p 27-31

THM$_{17}$: Stone-Weierstrass réel

... : fct lip ; thm Weierstrass

Cor$_{19}$: Stone-Wei cplx

Appli$_{20}$: Vect$(e_n, n\in\mathbb{Z})$ dense dans $\mathcal{C}^{\mathbb{K}}_{2\pi}$. (résultat prouvé d'une autre façon en III)

II) Espaces L^p, $p\in[1;+\infty]$: $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ espace mesuré

A) Définition - ~~structure~~ propriétés :

[BRI]

Déf$_{21}$: $\mathcal{L}^p(\mu)$ et $L^p(\mu)$ + $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ et $L^\infty(\mu)$

Prop$_{22}$: $L^p(\mu)$ est un $\mathbb{K}$-ev

Ex$_{21}$: mesure de comptage $\leadsto \ell^p(\mathbb{N})$

Prop$_{21}$: Si $\mu(\Omega)<+\infty$, $1\leq p\leq q\Rightarrow \mathcal{L}^q\subset L^p$

Rem$_{22}$: faux si ↗ non eas...

THM$_{23}$: Hölder

Déf$_{24}$: $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_\infty$

THM$_{25}$: Minkowski

~~Cor$_{26}$~~ Csq$_{26}$: $L^p(\mu),\|\cdot\|_p$ ~~est~~ ev normé

[RUD]

THM$_{26}$: Riesz-Fischer Dév... ?

Csq$_{27}$: $L^2(\mu)$ Hilbert muni du ps...

B) Convolution et densité : sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$

[BRI]

THM$_{28}$: $\forall p\in[1;+\infty[$, $\mathcal{C}_c$ dense dans L^p (mettre avant densité fct étagée / escalier) ?

[El Amr]

Déf$_{29}$: convolut°

Prop$_{30}$: L^1 Algèbre de Banach avec $*$

THM$_{31}$: Convolution L^p/L^q + L^1/L^p

Déf$_{32}$: Approx de l'unité

Rem$_{33}$: Construction générique + exs : noyau de Gauss / Cauchy

THM$_{34}$: CV avec approx de l'unité L^p + $\mathcal{C}^0_{unif,bor}$

Prop$_{35}$: convolution-dérivation

Déf$_{36}$: suite régularisante + ex construct° avec $x\mapsto\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)\mathbb{1}_{|x|\leq1}$

THM$_{37}$: $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ dense dans $L^p(\mathbb{R},\lambda)$ — mettre ici rappel de déf T.F.

Appli$_{38}$: Lemme de Riemann-Lebesgue pour T.F.

THM$_{39}$: Injectivité de la T-F + Formule d'inversion.