I) Généralités

A) Formes bilinéaires - quadratiques : $\mathbb{K}$ corps com. $car(\mathbb{K}) \neq 2$, E $\mathbb{K}$-ev de dim n

Déf1 : forme bilin (+ sym) + notat° $\mathcal{L}_2(E)$ = $\mathbb{K}$-ev

Ex2 ...

On fixe $B = (e_i)_{i=1}^n$ base de E

Déf3 : matrice de φ

Thm4 $\varphi(x,y) = {}^tXAY$

THM5 : $\varphi : E\times E \to \mathbb{K}$ bilin $\Leftrightarrow \exists A \in M_n(\mathbb{K}), \ell_1, ..., \ell_n \in E^*$ indép. t.q $\varphi(x,y) = \sum a_{ij} \ell_i(x) \ell_j(y)$

une c'est juste ~~la~~ base duale en fait.

Prop6 φ sym (antisym.) $\Leftrightarrow$ sa mat. dans une base B quelc est sym / antisym.

Isog7 : $\mathcal{L}_2(E) = S_2(E) \oplus A_2(E)$ + dimensions...

Déf8 : forme quad + notat° $Q(E)$

THM9 : Lien entre φ et q avec id de polarisat°

Déf10 : φ = forme polaire de q

Prop11 : formule changement de base + déf matrices congruentes + déf f. q. équivalentes

Ex12 : voir Gourdon

[ROM] p. 463 - 467

[GOU] p. 242

B) Rang - noyau :

Déf13 : discriminant φ / q

Rem14 : défini à un carré près (cf changem^t de base)

Déf15 : rang forme bilin + déf b non dégénérée + déf pour q

Ex16 : 2 exs. de Grif.

Rem17 : $rg(\varphi) = rg(j)$ où $j : \begin{vmatrix} E \to E^* \\ y \mapsto \varphi(\cdot, y) \end{vmatrix}$ ou prop.

Déf18 : noyau de φ + Rem dimension + rem. φ non dég $\Leftrightarrow N(\varphi) = \{0\}$

Déf19 : f q. réelle $\to$ déf ≥ 0 (et juse ≥ 0)

Rem20 : f q déf $\geq 0 \Rightarrow$ non dégénérée

$N(q) \neq \{x \mid q(x) = 0\}$. ⚠

[ROM] ...

[GRI] p. 289 - 296

II) Orthogonalité - Isotropie :

A) Orthogonalité :

Déf21 : $x \perp_\varphi y$ + $X^\perp$

Prop22 : $X, Y \subseteq E$ 2 parties non vides, $E = \{0\}^\perp$, $X \subseteq (X^\perp)^\perp$

$X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp \subseteq X^\perp$

Rem23 : On peut avoir $x \perp x$ sans $x = 0$ ex $\varphi(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$

Rem24 : $N(\varphi) = E^\perp$, $\forall X \subseteq E$, $N(q) \subseteq A^\perp$ $(N(\varphi))$

Lemme25 : Soit $j : \begin{vmatrix} E \to E^* \\ y \mapsto \varphi(\cdot, y) \end{vmatrix}$, $(j(F))^\circ = F^\perp$ en identifiant E^{**} et E

Prop26 : $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap N(q))$

• $F^{\perp\perp} = F + N(q)$.

Si q non dégénérée : $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$, $F^{\perp\perp} = F$

ou remplacer par Thm 15.20 [ROM]

mdr si on change d'édit° ils ont pas les m̂ n° !!!

[ROM] p. 468

[GRI] p. 305 - 306

B) Isotropie :

Déf27 : vecteur isotrope

Rem28 : q est définie $\Leftrightarrow$ son seul vecteur isotrope est 0.

Ex29 : $q = \dots$, $M(q) = \begin{pmatrix} 4 & 5/2 & -3/2 \\ 5/2 & 3 & 4 \\ -3/2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ non dégénérée mais e_3 isotrope $\hookrightarrow$ q non définie.

Déf30 : Cône isotrope $\mathcal{I}(q)$

Rem31 : $\mathcal{I}(q)$ non ev, cône (déf)

Ex32 2 ex. de Grif. + 2 dessins

Prop33 : $N(q) \subseteq \mathcal{I}(q)$

Déf34 : espace isotrope V : $V \cap V^\perp \neq \{0\}$ ($\Leftrightarrow b_{|V}$ dégénérée)

Rem35 : $V = Kx$, $x \neq 0$, x isotrope $\Leftrightarrow V$ l'est

Déf36 : V tot. isot $\Leftrightarrow V \subseteq V^\perp \Leftrightarrow b_{|V} = 0$

Rem37 : $\dim V^\perp = n - \dim V \Rightarrow [V$ totalem^t isot $\Rightarrow \dim V \leq \frac{n}{2}]$

Prop38 : $E = F \oplus F^\perp \Leftrightarrow F$ non isotrope

[GRI] p. 296 - 297

[PER] p. 123

[GRI] p. 307

[470] Suite

II) C) Groupe orthogonal : (E,q) ev de dim n, muni de q f.q. non dégénérée, on note φ sa forme polaire

[GRI] p. 309 – 312

Prop-déf39 : déf adjoint : $f \in \mathcal{L}(E)$, $f^* \in \mathcal{L}(E)$: $\varphi(f(x),y) = \varphi(x, f^*(y))$

Prop40 : prop de f^*

THM41 : LASSE, $q(f(x)) = q(x)$; $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y)$; $f^* \circ f = id$
+ déf f orthogonal

Déf42 : $O(q) \stackrel{\text{not}}{=}$ groupe orthogonal de q.

Prop43 : $f \in O(q) \Rightarrow \det(f) = \pm 1$

Déf44 : $SO(q)$

THM45 : $S = Mat_B(q)$, $A = Mat_B(f)$ ⚠ q quad, f lin ; $f \in O(q) \Leftrightarrow {}^tASA = S$.

[faire une partie sur $O(E)$; $SO(E)$ (E euclidien) quand j'aurai bossé le dév] [PER] + [FRA-Alg3]

III) Classification des formes quadratiques - Applications :

A) Réduction de Gauss et base q-orthogonale :

[ROM] p. 471 – 477 ou [GRI] p 298 – 301

Déf46 : base q-orthogonale

Rem47 : Matriciellemt → $Mat_B(q)$ diagonale
↳ $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$
recherche de base q-ortho revient à chercher $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tq ${}^tPAP$ diago

THM48 : Réduct° de Gauss + cor. pour avoir base q-orthogonale

Méthode59 : Réd. de Gauss] [GOU]

Cor60 : avec notat° thm $Ker(q) = \bigcap_{i=1} Ker(\ell_i)$
$rg(q) = r$

Ex61 : gnf. p. 302

B) Classification sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:

[GRI]

• Sur $\mathbb{C}$:

THM62 : Classificat° sur $\mathbb{C}$

Rem63 : 2 f.q. cplx ~~sont~~ ont des mat. congruentes ⇔ elles ont m̂ rang.

Ex64 : exo 12 GRI

• Sur $\mathbb{R}$

THM65 (Sylvester) ...

Déf66 : signature ⇝ $p+(r-p)$; $r = rg(q)$

Cor67 : • 2 f.q. réelles ~~cong~~ éq. ⇔ m̂ rg et m̂ signature
• q déf ≥ 0 ⇔ $sg(q) = (n,0)$
• q non dég ⇔ $sg(q) = (p, n-p)$

Ex68 : ex du GRI

[CAL] Appli69 : Formes de Hankel (Dév 1)

Appli69' : Lemme de Morse.

C) Classificat° sur un corps fini : $\mathbb{F}_q$:

$p \geq 3$ 1er, $q = p^m$, $m \in \mathbb{N}^*$
E - $\mathbb{F}_q$ ev de dim n

[ROM] p 428

Lemme70 : $\frac{q-1}{2}$ carrés et non carrés dans $\mathbb{F}_q^*$
$\forall a,b \in \mathbb{F}_q^*$, $c \in \mathbb{F}_q$, $\exists (x,y) \in \mathbb{F}_q$ tq $c = ax^2 + by^2$.

[ROM] p. 483 – 485

THM71 : réd. f.q. sur $\mathbb{F}_q$ E

Cor72 : 2 f.q. non dégénérée q, q' sur E sont éq. (i.e. leur mat. sont congruentes) ⇔ $\forall B$ base de E $\frac{Disc_B(q')}{Disc_B(q)}$ carré de $\mathbb{F}_q^*$

[CAL.N]

Déf73 : Symbole de Legendre

Prop74 : • $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}$ dans $\mathbb{F}_p$, p 1er impair
• $\forall a \in \mathbb{F}_p^*$, $\#\{x \in \mathbb{F}_p \mid ax^2 = 1\} = 1 + \left(\frac{a}{p}\right)$

THM75 : Loi de réc. quad. (Dév 2)

Réf : • [ROM] • [GRI] [GOU] [CAL.N].
• [PER] ← à enlever ...