

Plan détaillé L60 endom. dans un espace eucl

$E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ espace eucl de dim $n \in \mathbb{N}^*$

I) Conséquences du caractère euclidien:

A) Adjoint d'un endomorphisme:

Thm1: (Riesz). $\forall \ell \in E^*, \exists ! a \in E$ tq $\ell = \langle a, \cdot \rangle$

Thm2: $\forall u \in L(E), \exists ! u^* \in L(E)$ tq $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle \forall x, y \in E$

Def3: $u^* =$ adjoint de u .

Thm4: $B = (e_i)$ base de $E, G = (\langle e_i | e_j \rangle)_{i,j}$ (matrice de Gramme)

$A = \text{Mat}_B(u), \text{Alors } \text{Mat}_B(u^*) = G^{-1} A G$.

Donc si B orthonormée, $\text{Mat}_B(u^*) = {}^t A$

Cor5: $\det(u) = \det(u^*)$

Ex6: $u: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x+2y \\ 2y+z \\ z+3x \end{pmatrix}$, $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{Mat}_B(u^*) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

sur $\mathbb{R}^3$ avec p.s. usuel

B) Propriétés de l'adjoint:

Prop7: $\forall u, v \in L(E), \lambda \in \mathbb{R}$,

1) $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$

2) $(u^*)^* = u$

3) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

4) Si $u \in GL(E), u^* \in GL(E)$
 $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

Prop8: $\text{Ker}(u^*) = (\text{Im } u)^\perp$; $\text{Im}(u^*) = (\text{Ker}(u))^\perp$

$\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u)$

$F \subset E$ u stable,

$F^\perp$ est u^* stable.

Thm9: Un adjoint sur un espace hermitien est aussi défini, les endomorphismes sont similaires (avec des conjugués à certains endroits)

Prop9: $\|\cdot\|$ norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. On a $\|u\| = \|u^*\|$. Et $u \mapsto u^*$ continue sur $L(E)$.

Prop10: $u \in L(E), u = 0 \iff \text{Tr}(u \circ u^*) = 0$.

Thm11: Vient du fait que $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^t B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

II) Endomorphismes normaux, auto adjoints:

A) Endom. normaux

Def12: endom. normal

Rem13: tous les endom. qu'on va étudier après le sont: auto-adj; anti-sym; orthogonaux

Ex14: une isométrie est normale (λId_E) + endom orthog: $u u^* = \text{Id}_E$

Prop15: u normal $\iff \forall B$ b.o.n. de E , $\text{Mat}_B(u)$ normal i.e $\text{Mat}_B(u) {}^t \text{Mat}_B(u) = \dots$

Lemme16: $u \in L(E)$ normal, $F \subset E$ stable $\implies F^\perp$ u -stable et $u|_F, u|_{F^\perp}$ normaux

Lemme17: $u \in L(E)$, $\exists P \subset E$ de dim 1 ou 2 stable par u

Lemme18: E de dim 2, $u \in L(E)$ normal.

Si u admet une v.p. réelle, il est diag dans une b.o.n.

Sinon: $\exists B$ b.o.n. tq $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, b \neq 0$

Thm19: Réduct^o endom. normaux.

B) Endom. auto-adjoints/antisym:

Def20: déf + notation $S_n(\mathbb{R})$ + antisym: $o_n(\mathbb{R})$ et $S(E), o(E)$

Thm21: $u \in L(E)$ sym (resp antisym) $\iff$ sa mat dans une b.o.n. est sym (resp antisym)

Cor22 $\dim(S(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(o(E)) = \frac{n(n-1)}{2}$, $L(E) = S(E) \oplus o(E)$
 $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus o_n(\mathbb{R})$

Thm23: $u \in S(E) \implies$ il existe ses v.p. $\in \mathbb{R}$, et u se diagon. dans une b.o.n.

Thm24: $u \in o(E)$, il existe ses v.p. $\in i\mathbb{R}$ et $\exists B$ b.o.n. tq $\text{Mat}_B(u) =$

$\begin{pmatrix} 0 & R_1 & \\ & \ddots & \\ & & 0 & -R_r \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ où $R_k = \begin{pmatrix} 0 & -b_k \\ b_k & 0 \end{pmatrix}, b_k \neq 0$.

Cor25: $A \in S_n(\mathbb{R}), \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq ${}^t P A P$ diagonale.

C) Cas des endomorphismes sym. ≥ 0 et applicat^o du thm spectral:

Def26: S sym ≥ 0 + sym déf $\geq 0 \rightsquigarrow S^+(E)/S^{++}(E)$

+ mchese sur matrice $\rightsquigarrow S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$

Thm27: $u \in S^+(E)$ (resp $S^{++}(E)$) $\iff u \in S(E)$ et il existe ses v.p. sont ≥ 0 (resp > 0)

Cor28: $A \in M_n(\mathbb{R}), A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \exists B \in M_n(\mathbb{R}), A = {}^t B B$.

Rem29: Un résultat + fort de racine carrée vient après.

III) Endomorphismes orthogonaux:
A) Résultats généraux:
 Déf 35: isométrie = appli orthogonale ($\Leftrightarrow u \circ u^* = u^* \circ u = \text{id}_E$) $\rightarrow O(E)$
 + déf des matrices $\perp \rightarrow O_n(\mathbb{R})$
 Ex 32: homothétie $\in O(E) = \{\pm \text{id}_E\}$; si $\dim E = 1$, $O(E) = \{\pm \text{id}_E\}$
 THM 33: $u \in O(E) \Leftrightarrow \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$
~~THM 34: $O(E)$ ss-groupe compact de $GL(E)$~~
 ~~$O_n(\mathbb{R})$ $\xrightarrow{\text{GL}_n(\mathbb{R})}$~~
 THM 34: B bon de E, $u \in \mathcal{X}(E)$. $u \in O(E) \Leftrightarrow u(B)$ bon de E
 THM 35: Réduct^o de $u \in O(E)$
 Lem 36: version matricielle.
 Ex 37: déf sym $\perp$ + déf réflexions, ce sont des endom. $\perp$ d'après le thm suivant:
 THM 38: $F \subset E$, σ_F auto-adjt; σ_F isométrie
 $\sigma_F \circ \sigma_F = \text{id}$, $\sigma_F \circ \sigma_F \perp = -\text{id}_E$, $\sigma_F + \sigma_F \perp = 0$
 si $\dim(F) = p$, $\exists B$ bon tq $\text{Mat}_B(\sigma_F) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$, $\det(\sigma_F) = (-1)^{n-p}$
 Rem: une sym $\perp$ est $\perp$ MAIS une project^o $\perp$ n'est pas forcément $\perp$
 Ex: $\mathbb{R}^2 = F \oplus F^\perp$ où $F = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\langle p_F(x) | p_F(y) \rangle = 1 \neq 0 = \langle x | y \rangle$

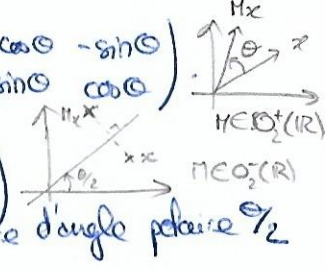
à mettre en cor du Thm 23

[ROR]
 P. 706
 724
 728
 [CAL]
 357

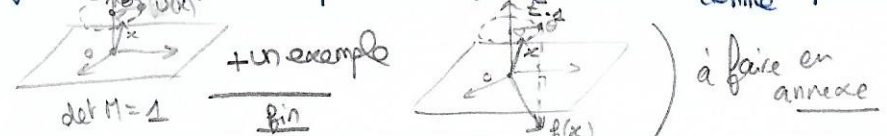
THM 40: $O(E)$ ss-groupe de $GL(E)$
 $O_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{GL}_n(\mathbb{R})}$
 Prop 41: $\forall u \in O(E) \det(u) = \pm 1$
 $\forall A \in O_n(\mathbb{R}) \det(A) = \pm 1$
 Déf 42: $O^+(E), O^-(E)$ (+ m déf pr $O_n(\mathbb{R})$)
 THM 43: $O^+(E) (O_n^+(\mathbb{R}))$ ss-groupe distingué d'indice 2 de $O(E) (O_n(\mathbb{R}))$
 THM 44: $O(E)$ compact de LE
 $O_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{M_n(\mathbb{R})}$ ③
 Cor 45: $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \exists (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}), A = OS$ (Δ pos unité)
 THM 46: $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ homéomorphisme ⑤
 THM 47: $n = \dim E \geq 2$, $O(E)$ engendré par les réflexions. ⑥

C) Cas de la dimension 2 et 3:

$u \in O_2(\mathbb{R})$ ($n \in \{2, 3\}$) on note $M = \text{Mat}_B(u)$ où B base canonique de $\mathbb{R}^n$
 $\rightarrow n=2$
 THM 48: si $M \in O_2^+(\mathbb{R}), \exists \theta \in \mathbb{R}$ tq $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
 M est une rotation d'angle θ , de centre O
 • si $M \in O_2^-(\mathbb{R}), \exists \theta \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$
 M est la symétrie orthogonale p/n à la droite d'angle polaire $\theta/2$
 $\rightarrow n=3$:
 THM 49: $\exists B'$ bon de $\mathbb{R}^3$ tq $\text{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$
 Avec $\epsilon = 1$ si $\det M = 1$ (ie $M \in O_3^+(\mathbb{R})$)
 $\epsilon = -1$ sinon ($M \in O_3^-(\mathbb{R})$)



Interprétation 50:
 • $M \in O_3^+(\mathbb{R})$, u est une rotat^o autour de l'axe $E_1 = \text{Ker}(M - I_3)$, d'angle θ (non orienté) donné par $\text{Tr}(M) = 2\cos \theta + 1$
 • $M \in O_3^-(\mathbb{R})$, u est une rotat^o autour de l'axe $E_{-1} = \text{Ker}(M + I_3)$ suivie d'une symétrie $\perp$ p/n au plan $E_{-1}^\perp$ (l'angle est encore donné par $\text{Tr}(M) = 2\cos \theta - 1$)



[ROR]
 P. 704
 715
 [GRI]
 P. 241
 245
 P. 733

Ref:

[ROM]

[GRI]

([CAL] < dev)

Dev: 1) Red. end. normal $[ROM]$
2) exp: $sn \rightarrow sn^{++}$ fem. $[CAL]$