[158] : $S_n(\mathbb{R})$ $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$

I) Généralités : ← trouver une meilleur orga... Aucun livre ne colle...

A) Déf 1ère prop : $\mathbb{K}$ de $\mathrm{car} \neq 2$

[GOU] p. 240-241 + [CAL] p. 348

- déf $S_n(\mathbb{K})$ + $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ + exs
- Thm $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, $S_n(\mathbb{K})$ ssev de dim $\frac{n(n+1)}{2}$ + base = ...
- déf $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ $({}^t\bar{M} = M)$ + exs
- Thm : $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
- Rem : $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ ~~ssev~~ sous $\mathbb{R}$ ev de dim n^2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ⚠ ce n'est pas un $\mathbb{C}$-ev
- Rem : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on note dans la suite $M^* = {}^t\bar{M}$ si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M^* = {}^tM$ si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- déf : M ~~déf~~ positive : $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\langle x, Mx \rangle \geq 0$ i.e $x^* M x \geq 0$ (m̂ chose pr vect) $M \in S_n$ ou H_n (resp déf ≥ 0) → >0 $x^* M x > 0$

(sur $\mathbb{C}$, $\langle x, y \rangle = {}^t\bar{x} y$)

B) Lien avec les endom. sym/hermi

E eucli ou hermi de dim finie

[GOU] p. 255-257 + [ROM] p. 730 ≃ + exemples ?

- → déf adjoint
- → prop $\mathrm{Mat}_B(f^*) = \mathrm{Mat}_B(f)^*$ où B bon
- → déf endom sym / hermi + déf endom sym déf ≥ 0 ... ROM
- → Thm f hermi/sym ⟺ $\forall B$ bon $\mathrm{Mat}_B(f)$ hermi/sym
- → Rem : csq sur $S(E)$ ss ev de $\mathcal{L}(E)$, dim ...] ROM

C) Lien avec les formes bilin.

[GOU] p. 239-242 +246 [bon faut écrire certaines rem en thm...]

- genre : $\mathcal{L}_2(E) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dim $= n^2$
- lien entre mat sym/hermi et forme sym/hermi + $Q(E)$ ev de dim...
- parler du rang et du discriminant (on en aura besoin pour la suite)
- définir f.q. déf ≥ 0 + lien avec matrices + dire que c'est un $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou produit hermitien ! [on peut aussi suivre ROM p. 460 mais il reste que sur $\mathbb{R}$...]

en remarque → [penser à l'ex : $d^2 f(a)$ f.q., + Hessienne → étude pour extrema par ex] ♥

II) Réductions et applications :

A) Décomposition de Gauss :

[GRI] p. 309-311 + 330 ⚠ forme hermi

- → Thm réd gauss + Sylvester ♥ ou [CAL]
- → appli aux matrices congruentes : explicat° act° de grpe rep. orbites
- → signature
- → KR f.q déf ≥ 0...

B) Thm spectral : et csq directes

[ROM] p. 733-738 (pour $\mathbb{R}$) (avec pseudo-réd sim.) + appli : Ellips DEV

[GRI] p. 285 + après pour hermitien

C) Applicat° de ces réd

[ROM] p. 735-742 + [CAL] p... [avant déc exp]

- → Thm sur $S^+(E)$, $S^{++}(E)$ + ~~autre de~~ KR $S_n^{+(+)}(\mathbb{R})$ + (autre KR avec mineurs ? + $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ouvert)
- ↳ m̂ chose pour $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ [CAL] p. 348
- Lemme sur $\|\!|\cdot|\!\|_2 = \rho(\cdot)$ pr S_n, $\sqrt{\rho({}^tAA)}$ sinon [ROM] p. 742
- Thm exp : $S_n \to S_n^{++}$ homéo DEV Rem : vrai aussi sur $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$] [CAL]
- Thm : racine carrée ... (suivre ROM)

~~III~~) D'autres réduct° et applis

A) Déc polaire

[ROM] p. 740-742 + [CAL] p. 350 (déc sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$)

+ Rem : via déc exp, on a : + rem ≃ pé

Thm : $GL_n(\mathbb{R})$ ~~Hom~~ homéom. $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$; $GL_n(\mathbb{C})$ ...

B) LU-Cho :

[CIA]

Insister sur Cho, donner des appli à la résolut° de syst lin + exemple des vecteurs gaussien.