Plan détaillé [157] : Endom. trigo/nilpotents

K corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$. E K-ev de dim n. $u \in \mathcal{L}(E)$

I) Endomorphismes trigonalisables :

A) Mise en contexte :

+ notat° spectre $Sp(u)$

[GOU] Déf1 : Polynôme KR de $u \rightsquigarrow \chi_u$. + pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ + v.p = racines de χ_u

Rem2 : Tous les résultats sur $\mathcal{L}(E)$ sont valable sur $M_n(\mathbb{K})$, on identifie les espaces via une base $\mathcal{B}$ de E. (pour $u \in \mathcal{L}(E) \rightsquigarrow A = Mat_{\mathcal{B}}(u) \in M_n(\mathbb{K})$)

Ex3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-1)(X-2)$.

Prop4 : $F < E$ u-stable, u_F = endom de $\mathcal{L}(F)$ induit par u sur F. Alors $\chi_{u_F} | \chi_u$

Déf5 : polynôme minimal de u : π_u

Prop5 : $F < E$ u-stable, $\pi_{u_F} | \pi_u$.

[ROM] p.667 + [GRI] p.170 ≈

Déf6 : u trigonalisable + A trigonalisable

Rem7 : une mat. triang sup est semblable à une mat. triang. inf donc on va se contenter ~~d'obser~~ d'observer quand un endom est représenté par une mat. triang. sup.

Ex8 : mat. diago OK ; projecteurs diagon. donc trigon.

Rem9 : 2 matrices semblables ont même dét/m̂ trace, donc si $A \sim T$ et T triangulaire, $\chi_T = \chi_A$, et les termes diagonaux de T sont les v.p. de A

Une conséquence : Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ trigon, on obtient $Tr(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$, $\det(A) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$

[ROM] p.668

Rem10 : Si A non trigo ↑ faux : ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 0 & 2\sin\theta & 2\cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in]0, \pi[$

B) Trigonalisation :

utilise Cayley-Hamilton

[ROM] p.668 ou [MAN] p.94

THM11 : u trigo $\Leftrightarrow$ χ_u scindé sur K $\Leftrightarrow$ π_u scindé sur K

Cor12 : Dans K alg. clos (comme $\mathbb{C}$) tout endom. est trigo.

Cor13 : K alg clos, $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\exists P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tq $P^{-1}AP$ triang. sup.

[GRI] 174

Ex14 : $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-1)^2(X+2)$, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

[ROM] p.670

Cor15 : $u \in \mathcal{L}(E)$ trigo, $F < E$ u-stable ; u_F trigo

THM16 : Trigonalisation simultannée ④

♥ ou [GOU]

Cor17 : Formulation matricielle.

C) Quelques résultats de topologie. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

[BEC] p.179 178

Notat°18 : $\mathcal{G}_n(\mathbb{K}) \subseteq D_n(\mathbb{K}) \subseteq T_n(\mathbb{K}) \subseteq M_n(\mathbb{K})$ + muni d'une norme (quelconque car elles sont ttes ~)

Prop19 : Dans l'espace $T_n(\mathbb{K})$ on a $\overline{\mathcal{G}_n(\mathbb{K})} = T_n(\mathbb{K})$, ~~$\mathring{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$~~

~~Donc~~ $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ ouvert de ~~E~~ $T_n(\mathbb{K})$; $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ et $D_n(\mathbb{K})$ denses dans $T_n(\mathbb{K})$

Lemme19' : $T_n(\mathbb{R})$ fermé de $M_n(\mathbb{R})$

Cor20 : $T_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$ donc $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ (ouvert) dense de $M_n(\mathbb{C})$ dans l'espace topo $M_n(\mathbb{K})$

· $T_n(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{G}_n(\mathbb{R})} = \overline{D_n(\mathbb{R})}$

(ou $M \mapsto \pi_M$ non continue [ROM])

Appli21 : $\varphi : \begin{vmatrix} M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ M \longrightarrow D \end{vmatrix}$ où D est la matrice diagonalisable de la déc de Dunford de M.

φ non continue

♥ ou [CAL] p.48

Appli22 : Autre Thm de Cayley-Hamilton sur $M_n(\mathbb{C})$.

(car on a besoin de ce thm avant)

II) Endomorphismes nilpotents :

A) Généralités :

[BEC] p.168 – 170

Déf23 : endom. nilpotent, $\mathcal{N}$ = ens. des endom. nil + matrice nilp.

Ex24 : $J_r = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotent ; si A nilp, $M \mapsto AM$ nil, $P \mapsto P'$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ (pas dans $\mathbb{K}[X]$)

Prop25 $\mathcal{N}$ cône ...

Rem26 pas idéal de $\mathcal{L}(E)$ ni ssev car pas stable par + ex $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Prop27 : 2 nilpotents commutent $\Rightarrow$.+. nilp

$u, f \in \mathcal{L}(E)$ avec u nilp et u, f commutent $\Rightarrow u \circ f$ nilp.

Déf28 : Indice de nilpotence (p) ~~+ Prop 28~~

~~Rem 29 Via Cayley-Hamilton, p ≤ dim E~~

[BER] p.977 (ou) [GOU] p.207 (ou [BEC])

Prop29 : u nilp. d'indice $r \geq 1$. $\begin{cases} \forall i \in [\![1;r]\!], Ker(u^{i-1}) \subsetneq Ker(u^i) \\ \forall i \geq r, \quad Ker(u^i) = Ker(u^r) = E \end{cases}$

[157] - Suite

II) B) Caractérisations :

[BEC] p. 170 171

Prop$_{30}$: $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p \iff \Pi_u = X^p$

Rem$_{31}$: Via Cayley-Hamilton, $p \leq n$

THM$_{32}$: [KRisat° de la nilpotence] LASSE
(i) u nilpotent ; (ii) $\chi_u = X^n$; (iii) $\exists p \in \mathbb{N}$, $\Pi_u = X^p$; (iv) u trigo avec 0 pour seule v.p.] ♥

Csq$_{32'}$ Le seul endom. nilp et diago est 0

Rem$_{33}$: 0 seule v.p. de $u \not\Rightarrow u$ nilp : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$

Prop$_{34}$: Si car$(\mathbb{K}) = 0$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dc OK)
u nilpotent $\iff \forall k \in \mathbb{N}^*$, $tr(u^k) = 0$.] [GOU] chercher où

Prop$_{35}$: $u \in \mathcal{N}$, $F < E$ u-stable $\Rightarrow u_F$ nilpotent

Csq$_{36}$: (E $\mathbb{K}$-ev de dim n) $Vect(\mathcal{N}) = Ker(Tr)$

] ♥ (cf rapp. jury)] [BEC] p 169

III) Applications à la réduction :

A) Décomposition de Dunford

[ROM]

Lemme$_{37}$ sur polyn 1er entre eux...

Lemme$_{38}$ Déc. des noyaux

THM$_{39}$ Dunford — Dév 1

Rem$_{40}$: La déc de Dunford ne peut se faire que sur une mat. trigo
puisqu'on doit avoir Π_u scindé
• Elle peut servir à calculer + facilement $\exp(u)$

B) Réduction de Jordan :

a) Cas nilpotent

[MAN] + [ROM]

Lemme$_{41}$: $u \in \mathcal{L}(E)$ d'indice $q \in \mathbb{N}^*$
(i) $\forall x \in E \setminus Ker(u^{q-1})$, $B_{u,x} = (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre et $F_{u,x} = Vect(B_{u,x})$ est u stable
(ii) $F_{u,x}$ admet un supplémentaire G u-stable. — Dév 2

[ROM]

THM$_{42}$: Réduct° de Jordan pour u nilpotent

[MAN]

Prop$_{43}$: Si on ordonne $d_1 = deg(\Pi_u) \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$ où $u \sim \begin{pmatrix} J_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_r} \end{pmatrix}$
On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\#\{j \in [\![1,r]\!] \mid d_j = k\} = 2\dim(Ker\, f^k) - \dim(Ker\, f^{k-1}) - \dim(Ker\, f^{k+1})$

b) Cas général

[ROM] ou [MAN]

THM$_{44}$: Jordan — fin dév 2 si tps

~~[MAN]~~ [BER]

(Prop$_{45}$ ou Rem$_{45}$ ou pas la mettre) : 2 endom. à polyn KR scindé sont semblables $\iff$ ils ont la même réduct° de Jordan. → la preuve est pas vrm écrite dans [MAN] (17)

[BER]

Ex$_{46}$: $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & & & & & (0) \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & 0 & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ (0) & & & & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (18)

+ Voir autre démo de Jordan (dans [MAN] c'est fait de 2 manières) (19) !

Réf :

- [GOU] - Algèbre
- [ROM] - ~~Ro~~ Algèbre
- [GRI] - Grifone - Alg. lin.
- [MAN] - Mansuy - Alg...
- [BEC] - Obj. Agrég

([CAL]. Caldero H2G2 pour Cayley-Hamilton / [BER] - Berhuy pour ex. réd de Jordan !)