+ déf ($\Leftarrow$)

155 Endomorphismes diagonalisables en dim. finie

faire remarque résultats avec matrices

On considère $\mathbb{K}$ un corps (commutatif), E un $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme de E.

I) Définitions et critères de diagonalisation :

A) Éléments propres :

(la faire en 4-5?)

DÉF$_1$: • $\alpha \in \mathbb{K}$ est dit valeur propre de u lorsque $u - \alpha Id_E$ est non injectif, l'ensemble des valeurs propres de u est noté $Sp_{\mathbb{K}}(u)$, c'est son spectre.

• On appelle espace propre de u associé à la valeur propre α l'espace $Ker(u - \alpha Id_E) \neq \{0\}$, noté E_α

• Tout élément de $E_\alpha \setminus \{0\}$ est appelé vecteur propre de u, associé à α.

Ex$_2$: Une homothétie αId_E n'a qu'une seule valeur propre α $E_\alpha = E$. Un projecteur a 2 valeurs propre 1 et 0

[GOU] 160 THM$_3$: Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de u, alors les sous-espaces propre $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe

(✱) + déf matrice diago (ou non)

DÉF$_4$ Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u lorsque $u(F) \subseteq F$

[FC] 158 Ex$_5$: Les sous-espaces propres de u sont stables par u

DÉF$_6$: Pour F un sous-espace stable par u, on appelle endomorphisme induit par u sur F l'endomorphisme $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$.

B) Polynômes d'endomorphisme - polynôme minimal :

• On considère le morphisme d'algèbre. $\varphi_u : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[u] \\ P \longmapsto P(u) \end{array} \right.$

• Si $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$, $P(u) = \sum_{i=0}^{m} a_i u^i$, où $\begin{cases} u^0 = id_E \\ u^2 = u \circ u \end{cases}$

GOU] 174 DÉF$_7$ Le noyau de φ_u est l'ensemble des polynômes annulateurs de u. Comme $\mathbb{K}[X]$ est principal, il existe un unique polynôme unitaire qui engendre $Ker(\varphi_u)$.
Ce polynôme est appelé polynôme minimal de u, noté Π_u

REM : Π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule u

Ex : si u nilpotent d'indice k ($\leq n$), son polynôme minimal est X^k

REM : Si $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel stable par u, $\Pi_{u_{|F}} \mid \Pi_u$.

PROP$_8$: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ polynôme annulateur de u. Si λ est une valeur propre de u, alors $P(\lambda) = 0$ GOU

REM$_9$: Attention, la réciproque est fausse : $P = X(X-1)$ annule Id_E avec 0 racine de P mais 0 non valeur propre de Id_E

PROP Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow \Pi_u(\lambda) = 0$ GOU p. 176

THM : (Décomposition des noyaux) : Soient $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$, les P_i étant premiers entre eux. Alors

$$Ker(P(u)) = Ker(P_1(u)) \oplus \dots \oplus Ker(P_k(u))$$

GR

REM : Ce théorème est très important pour la diagonalisation (cf après), il est en général utilisé lorsque P annule u, i.e. $Ker(P(u)) = E$

THM : (✱✱) u diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines $\Leftrightarrow$ Π_u scindé à racines simples.

C) Polynôme caractéristique :

DÉF : On appelle polynôme caractéristique de u, noté χ_u, le polynôme $\det(X Id_E - u) \in \mathbb{K}[X]$.

REM • Dans les fait pour calculer χ_u, on écrit u dans une base $\mathcal{B}$ de E, en notant $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, on a $\chi_u = \chi_M = \det(X I_n - M)$. ($\chi_u$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$)

• Par définition, λ valeur propre de $u \Leftrightarrow \lambda$ racine de χ_u

• χ_u unitaire de degré n, si $\chi_u = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$, on a $\begin{cases} a_0 = \det(u) \\ a_{n-1} = -Tr(u). \end{cases}$ GOU P. 162

Ex : Pour $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ représenté dans la base canonique par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, on a $\chi_u(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ 1 & X-4 \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$ GOU

PROP-Ex : Si u est nilpotent (d'indice k), $\chi_u = X^n$.

Ex : Si $M = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ (matrice compagnon), $\chi_M = P$, où $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$

PROP. Si $F \subseteq E$ sous-espace stable par u, alors $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$ (écrire u dans $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ ..) GOU p.163

THM (Cayley-Hamilton) : $\Pi_u \mid \chi_u$, i.e. χ_u annule u GOU p. 177

Coro : Comme $\deg(\chi_u) = n$, $\deg(\Pi_u) \leq n$.

[GOU] 164

Coro : Soit λ une racine de χ_u d'ordre de multiplicité k, alors $\dim(E_\lambda) \leq k$.

THM : Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) f diagonalisable

ii) χ_f scindé sur $\mathbb{K}$, et pour tout racine λ_i de χ_f d'ordre de multiplicité k_i : $k_i = \dim(E_{\lambda_i})$

[GRI] p.160

REM : On voit que la diagonalisation d'un endomorphisme dépend du corps $\mathbb{K}$,

$\hookrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2 + 1$, A diagonalisable sur $\mathbb{C}$, pas sur $\mathbb{R}$ (ou encore les rotations réelles n'ont pas de valeurs propres réelles.

[GRI] p.171 172

PROP. (Application à la puissance d'une matrice)

Soit $A \in M_n(K)$ diagonalisable, alors il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que $D = P^{-1}AP$ diagonale. Alors $A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

APPLI : (Système différentiel linéaire à coefficients constants)

Pour résoudre le système (*)
$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$
où $\cdot\ x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, $\cdot\ a_{ij} \in \mathbb{R}$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On suppose A diagonalisable : $\exists P \in Gl_n(\mathbb{R})$, D diagonale, $D = P^{-1}AP$

(*) $\iff X' = AX$

$\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X$

On pose $Y = P^{-1}X$, alors $Y' = P^{-1}X' = DY$. On résout ce système plus simple (car D diagonale), puis $X = PY$.

(***) : mettre proposition-résumé des critères de diagonalisation.

à mieux écrire

D) Critère de trigonalisation :

[GOU] p.165

DEF : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure

REM : Un endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base de E est trigonalisable, i.e. semblable à une matrice triangulaire supérieure.

THM : $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable $\iff \chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ (démo par réc)

Cor : u trigo $\Rightarrow u_{|F}$ trigo.

REM : Sur $\mathbb{C}$ (ou tout corps algébriquement clos) tout endomorphisme est trigonalisable.

Ex : Si u est diagonalisable, u est trigonalisable

(Peut-être un autre exemple ?)

E) Diagonalisation simultanée (⚠ Dunford)

[GOU] p.166

PROP. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors

* Tout sous-espace propre de u est stable par v
* $Im(u)$ est stable par v

[MAN] p.88

DÉF. $u, v \in L(E)$ sont dits co-diagonalisables s'ils sont diagonalisables dans une même base.

De même pour un plus grand nombre (fini) d'endomorphisme

[GOU] p.166

THM (Co-diagonalisation) :

Si u et $v \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et commutent, ils sont co-diagonalisables.

[MAN] p.88 + [GOU]

REM : On peut étendre ce résultat à k endomorphismes qui commutent 2 à 2 (par récurrence). C'est même une équivalence.

II) Application : Décomposition de Dunford

A) Résultat :

[GOU] p.194 195

Grâce au lemme des noyaux, on peut avoir une réduction plus poussée que la trigonalisation dans le cas où l'endomorphisme est non diagonalisable, c'est la décomposition de Dunford :

(V2)

Lemme (décompo noyaux) : Soit $P = \prod P_i$ annulateur de u, avec P_i 2 à 2 1er entre eux on pose $N_i = \ker(P_i(u))$. Alors $E = \bigoplus_{i=1} N_i$, $\forall i$, la project° p_i sur N_i // à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polyn en u

DVPT 1

⚠ (ou) [GRI] p.255

THM : Si χ_u scindé sur $\mathbb{K}$, $\exists! (d, n) \in L(E)^2$ tels que
$$\begin{cases} d \text{ diagonalisable, } n \text{ nilpotent} \\ u = d + n \\ n \text{ et } d \text{ commutent} \end{cases}$$

Calcul pratique de la décomposition de Dunford :

[GOU] p.195

* On calcule les projecteurs p_i : On prend F un polynôme annulateur de u (Π_u ou χ_u en général), $F=\prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{r_i}$; on décompose $\frac{1}{F}$ en éléments simples
$\frac{1}{F}=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{r_i}\frac{x_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j}\right)$, on pose $U_i=\sum_{j=1}^{r_i}x_{i,j}(X-\lambda_i)^{r_i-j}$, alors
$1=\sum_{i=1}^{s}U_iQ_i$, où $Q_i=\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{r_j}$, alors $p_i=U_iQ_i(u)$

* $d=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i p_i$, $n=f-d$

B) Application au calcul d'exponentielle :

[GOU] p.184

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E, on note $|||\cdot|||$ norme subordonnée sur $\mathcal{L}(E)$

PROP. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $0<R\leq+\infty$. Si $u\in L(E)$ vérifie $|||u|||<R$, alors la série $\sum a_n u^n$ converge (absolument), et sa somme définie un élément de $\mathcal{L}(E)$

CSQ-DÉF: Soit $u\in L(E)$, alors $g=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}u^n$ existe, $g\in\mathcal{L}(E)$, cet endomorphisme s'appelle l'exponentielle de u, noté $\exp(u)$.

PROP Si $u,v\in\mathcal{L}(E)$ commutent, $\exp(u+v)=\exp(u)\circ\exp(v)=\exp(v)\circ\exp(u)$

PROP. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, $v\in\mathcal{L}(E)$ inversible, alors $\exp(v^{-1}\circ u\circ v)=v^{-1}\circ\exp(u)\circ v$.

REM: Cette proposition reste vraie pour des matrice de $M_n(\mathbb{K})$, avec $\exp(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n$

CSQ: Si A est la matrice d'un endomorphisme u diagonalisable dans une base B de E, il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$, $P\in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $A=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\end{pmatrix}P$
et $\exp(A)=P^{-1}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}P$, (donc $\exp(u)$ est diagonalisable)

[GOU] p.196

REM: Soit $u=d+n$ la décomposition de Dunford, d et n commutent, donc on peut calculer facilement $\exp(u)$. (On note q l'indice de nilpotence de n)
$\exp(u)=\exp(d)\exp(n)=\exp(d)\sum_{k=0}^{q-1}\frac{n^k}{k!}$

REM: Une autre façon d'utiliser la décomposition de Dunford pour le calcul de l'exponentielle avec les $(p_i)_i$, on a :
$\exp(u)=\exp(d)\exp(n)=\sum_{i=1}^{s}e^{\lambda_i}\left[\sum_{p=0}^{r_i-1}\frac{(u-\lambda_i id_E)^p}{p!}\right]p_i$

[GOU] p.18

Application On peut appliquer les exponentielles de matrices lors de l'étude des équations différentielles linéaires, on utilise les propriétés :
- Pour $A\in M_n(\mathbb{K})$, $t\in\mathbb{R}\mapsto e^{tA}\in M_n(\mathbb{K})$ est dérivable de dérivée Ae^{tA}
- Pour $X:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^n$ dérivable, si $\frac{dX}{dt}=AX$, alors : $\forall t\in\mathbb{R}$, $X(t)=e^{tA}X(0)$

III) Cas des espaces euclidiens et hermitiens

[GRI] p.254

On se place dans le cas où E est un espace vectoriel réel, de dimension fini, muni d'un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On note $u\in\mathcal{L}(E)$

DEF: u est dit auto-adjoint lorsque : $\forall x,y\in E$, $\langle u(x)|y\rangle=\langle x|u(y)\rangle$

REM: u est auto-adjoint $\Leftrightarrow$ la matrice qui le représente dans une base orthonormée est symétrique.

[GRI] P.255

THM Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, et E espace euclidien, alors
1) u est diagonalisable
2) les sous-espaces propres de u sont 2 à 2 orthogonaux.
↳ on peut construire une base orthonormée de vecteurs propres de u.

DVPT

[GOU] p 25

REM: Pour $A\in M_n(\mathbb{R})$ symétrique, en considérant l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient un endomorphisme auto-adjoint. On a alors l'énoncé équivalent :

PROP: Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, et les espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$).

REM: Attention, le théorème est faux lorsque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
Par exemple $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&2i\end{pmatrix}$ est symétrique non diagonalisable

[GOU] p 25

REM: Pour E un espace hermitien ($\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien), les endomorphismes normaux (qui commutent avec leur adjoint) généralisent le cas des endomorphismes auto-adjoints réels. Nous le voyons grâce au théorème suivant

THM: Soit E espace hermitien, $u\in\mathcal{L}(E)$ normal, les assertions suivantes sont équivalentes
(i) u est normal
(ii) u se diagonalise dans une base orthonormale de E
(iii) u et u^* se diagonalisent dans une base orthonormale commune.

- Demander si c'est bien de parler de "diago" des isométrie (I_r, $\pm I_r$, Rot. R_θ) sachant que la preuve est pas immédiate ?

IV) Quelques résultats de topologie :

OU]
. 181

On se replace dans le cas de la partie III B), on note $\|\cdot\|$ une norme sur E, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $|||\cdot|||$ une norme subordonnée à $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{L}(E)$. Via une base $\mathcal{B}$ de E, on peut identifier E à $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{L}(E)$ à $M_n(\mathbb{K})$

GOU]
p-184
KO
, 2

PROP: L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$ — autre preuve dans [BEC] p.155

Corol : Pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

PROP Les matrices diagonalisables complexes $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$

REM: Le résultat est faux dans $\mathbb{R}$ par exemple pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

BEC)
, 179

PROP: Les matrices diagonalisables (réelles ou complexes) $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont denses dans $M_n(\mathbb{K})$

→ Références :

[GOU] : Gourdon, Algèbre, les maths en tête, ellipses

[BEC] : Beck, Malick, Peyré, Objectif Agrégation, H&K

[GRI] : Grifone, Algèbre Linéaire, Cépaduès

[MAN] : Mansuy, Alg. Linéaire