Plan idée

I) Sous-espace stables

[MAN] + [BEC]

A) Déf. 1ère prop

B) Endom. induits - bases adaptées

[GOU]

C) Dualité et ss-ev

II) Application à la réduction

[ROM] + [GOU] [BEC]

A) Lemme des noyaux et conséquences

Déc Dunford Dév 1

[MAN] + [GOU]

B) Diago - Trigo

[GOU]

C) Réd simultanée

III) Endomorphismes remarquables et ss-espaces stables par une famille d'endomorphismes :

[ROM] (+ [BEC] + [GOU])

A) Endomorphismes semi-simples

B) Endom normaux :

Dév réd dans ...

[PEY] p. 100

C) Représentations linéaires

↪ Maschke + lemme de Schur

Leçon $\boxed{154}$ Sous-espace stable par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Rapport du jury :

- ☐ Propriétés sur l'ens. des sous-espaces stables par un endom.
- ☐ Exemples pour une matrice diagonalisable ou nilpotente
- ☐ Étude des endomorphismes cycliques ou semi-simples
- ☐ Réduction des endomorphismes normaux (en applic.)
- ☐ Résolut° d'équat° matricielles
- ☐ Décomposition de Frobenius
- ☐ Examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes

Dév	Réf
1) Dunford + lemme des noyaux ←	[GOU] + [ROM]
2) Réd des endom normaux ←	[ROM] ou ~~[GOU] p. 260~~

chercher qqchose qui [illegible] pas sur [illegible] endom autoadj

Plan détaillé [154] SS-espaces stables...

I) Sous-espaces stables :

A) Déf - 1ère prop :

E ev de dim $n<+\infty$
$f\in\mathcal{L}(E)$

[MAN] P.15 - 16

DÉF$_1$: ss-espace stable par f

Ex$_2$: $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$ stables par f.

Prop$_3$: $f,g\in\mathcal{L}(E)$, si $f\circ g=g\circ f$ alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ stables par g

Rem$_4$: On en déduit que $\forall P\in\mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(f))$ stable par f.

Prop$_4$: F stable par f et g, alors par $f+g$, $f\circ g$.

Exs : · Tout ss-espaces stable par les homothéties
· Les sous-espaces propres de f sont stables par f.

[GOU] P.202

DÉF$_6$: ss-espace caractéristique de f

Prop$_7$: les ss-espaces KR sont stables par f.

B) Endomorphismes induits :

[MAN] P.15 - 17

DÉF$_8$ endom. induit

Rem$_9$ Δ $f_{|F}\neq f_F$

Prop$_{10}$: $\Pi_{f_F}\mid\Pi_f$ ← stables par f

Prop$_{11}$: $E=F\oplus G$, $\Pi_f=\mathrm{ppcm}(\Pi_{f_F},\Pi_{f_G})$ (Π_f = polyn mini de f) ①

Rem$_{12}$: Intérêt : étudier $f\Leftrightarrow$ étudier chaque f_{F_i} + simples

$E=F_1\oplus\dots\oplus F_p$, $B=B_1\cup\dots\cup B_p$ base adaptée, $\mathrm{Mat}_B(f)=\begin{pmatrix}\mathrm{Mat}_{B_1}(f_{F_1}) & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \mathrm{Mat}_{B_p}(f_{F_p})\end{pmatrix}$

[BEC] P.158

Prop$_{12}$: $E=F\oplus G$ (stables par f) $\chi_f=\chi_{f_F}\cdot\chi_{f_G}$ (polyn KR)

[MAN] P.17

Ex$_{13}$: p projecteur (sur $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$). Un sous-espace est stable par p $\Leftrightarrow$ (ssi) il est la somme directe d'un ss espace de $\mathrm{Im}(p)$ et de $\mathrm{Ker}(p)$ ②

(Si tps regarder l'ex des endom. nilpotents
↳ exo sur noyaux itérés...) MAN...

Rem$_{14}$: les endom. induits sont Δ pour thm de réduct° des endomorphismes !

C) Dualité et sous-espaces stables :

$u\in\mathcal{L}(E,F)$

(ou [ROM]) [GOU] P.135 - 136

DÉF$_{15}$: Application transposée. ${}^tu:\left|\begin{array}{l}F^*\longrightarrow E^*\\ f\longmapsto f\circ u\end{array}\right.$

Prop$_{16}$ E, F de dim finie

- $\mathrm{rg}(u)=\mathrm{rg}({}^tu)$, $\mathrm{Im}({}^tu)=(\mathrm{Ker}\,u)^\perp$; $\mathrm{Ker}({}^tu)=(\mathrm{Im}\,u)^\perp$ ③
- Si B base de E, B' base de F et $M=\mathrm{Mat}_{B,B'}(u)$
  B^*, B'^* bases duales de B, B'.
  ↳ $\mathrm{Mat}_{B'^*,B^*}({}^tu)={}^tM$

Prop$_{17}$: $f\in\mathcal{L}(E)$, $F<E$. F stable par $u\Leftrightarrow F^\perp$ ($\subset E^*$) stable par ${}^tu$ ④

[BEC] P.159

Rem$_{18}$: On a une proposition similaire ~~dans~~ dans un espace muni d'un p.s avec l'adjoint u^*.

♥ Cécile

Appli$_{19}$: Pour $\dim E=3$, $f\in\mathcal{L}(E)$, on peut trouver tous les ss-espaces F stables par f : $\dim F\in\{0,1,2,3\}$, les cas 0, 3 sont immédiats, si $\dim F=1$, F est une droite engendrée par un vecteur propre de f. Si $\dim F=2$, F est l'orthogonal d'une droite stable par ${}^tf$
→ mettre un exemple ⑤

II) Application à la réduction : . $f\in\mathcal{L}(E)$

[MAN] P.38

Rem$_{20}$: Pour réduire un endomorphisme, on cherche à « décomposer » l'espace E en somme directe de ss-espaces stables par f où l'endomorphisme induit est très simple. L'outil principal est le lemme des noyaux :

A) Lemme des noyaux et conséquences :

[ROM] 685

THM$_{20}$: (Lemme des noyaux version 1) (avec $\mathrm{Ker}(P(f))=\Pi\,\mathrm{Ker}(P_i(f))$)

[GOU] P.204 - 205

THM$_{21}$ (Lemme des noyaux v. 2) (P annule f)

Rem$_{22}$: On voit apparaître les ss-espaces KR de f

Dév 1 suite ID

Appli$_{22}$: ~~Décomposit° de Dunford~~

[BEC] 164 P.157

~~Rem$_{23}$: comme d, n commutent, cette déc. est intéressante pour calculer $\exp(f)=\exp(d)\exp(n)$, lorsque f non diagonalisable.~~
~~· Sous les condition de Appli 22, on a pu réduire f à l'étude d'homothétie et de nilpotents~~

Plan détaillé $\boxed{154}$ suite

II) B) Diagonalisation et trigonalisation : $f \in \mathcal{L}(E)$

Rem$_{24}$: Pour la diagonalisation, les ss-espaces stables qui apparaissent sont les sous-espaces propres. Pour la trigonalisat°, ce sont les ss-esp. KR

THM$_{25}$: f diagonalisable $\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$ scindé à racines simples tq $P(f)=0$
$\Leftrightarrow \Pi_f$ scindé à racines simples

Rem$_{26}$: On a alors (en notant $E_\lambda = \ker(\lambda id_E - f)$, $\forall \lambda \in sp_{\mathbb{K}}(u)$), $E = \bigoplus_{\lambda \in sp(u)} E_\lambda$ et f_{E_λ} homothétie

$\approx$ [BEC] p 157 ; [ROM] p 686 — 6

Ex$_{27}$: • projecteur (X^2-X), symétrie (X^2-1)...
• $A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $A^5 = I_n$. A diagon. dans $M_n(\mathbb{C})$, si A diagon. dans $M_n(\mathbb{R})$ ($\Pi_A = X-1$) $A = I_n$

[MAN] p 81

THM$_{28}$: f trigo $\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \Pi_f$ scindé

Cor$_{29}$: $\mathbb{K}$ alg clos (ex $\mathbb{C}$) $\Rightarrow$ tout $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable

[ROM] p 687

Csq$_{30}$: F f-stable. f diagon. $\Rightarrow f_F$ diago
f trigo $\Rightarrow f_F$ trigo

[GOU] 173 ou [MAN] 83

C) Réduction simultanée :

THM$_{31}$: ~~Diagonales~~ Diagonalisat° simultanée (pour 2 endom.)

Rem$_{32}$: Réciproque est vraie

THM$_{33}$: Trigonalisat° sim. (pour 2 endom)

[GOU] p 176 — 7

Rem$_{34}$: • ~~Par~~ les 2 thm sont aussi vrais pour une famille finie d'endom. commutant 2 à 2.
• La somme d'endom. diago qui commutent est donc diagonalisable

[ROM] p 759

D) Décomposition de Dunford :

Voici une réduction faisant intervenir les espaces KR de f

THM$_{35}$: Décomposition de Dunford — Dév 1 suite

[GOU] p 205

Rem$_{36}$: comme d, n commutent blabla $\exp(f)$...

[BEC] p 164 157

III) Endo. normaux et ss-espaces stables par une famille d'endom :

A) Endomorphismes semi-simples : $u \in \mathcal{L}(E)$

[GOU] p 236 238

DÉF$_{37}$: endom. semi-simple

Prop$_{38}$: Π_f irréd $\Rightarrow f$ semi-simple

THM$_{38}$: Si $\mathbb{K}$ alg clos, alors u semi-simple $\Leftrightarrow u$ diagonalisable — 9

THM$_{39}$: f semi-simple $\Leftrightarrow \Pi_f$ produit de polyn irréd unitaires $\neq$ 2 à 2 — 8

THM$_{40}$: Soit $f \in$ ~~$M_n(\mathbb{R})$~~ $\mathcal{L}(E)$ semi-simple, ~~Il semblable~~ E $\mathbb{R}$-ev. $\exists B$ base de E tq $Mat_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ avec D diagonale et B diagonale par blocs de blocs de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ — 10

[ROM] p 700

THM$_{41}$ (Dunford généralisé) (dans $\mathbb{R}$, $u = d+n$ avec ici d semi-simple) — 11

tout ça saute pour oraux blancs

B) Endomorphismes normaux : E espace muni d'un p.s. $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ~~ou C~~ $u \in \mathcal{L}(E)$

[ROM] p 827 — 831

DÉF$_{42}$: endom. normaux

Ex$_{43}$: ex.

Rem$_{44}$: $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrice de u dans une b.o.n. B de E. u normal $\Leftrightarrow {}^tAA = A{}^tA$

Lemme$_{45}$: $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. F u-stable, alors $F^\perp$ u stable et u_F, $u_{F^\perp}$ ~~se~~ normaux

Dév 2

Lemme$_{46}$: $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists P < E$ u-stable dim 1 ou 2

Lemme$_{47}$: $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ normal ~~alors~~ ~~non diagonalisable~~ alors $\begin{cases} b=-c,\ b \neq 0 \text{ et } a=d \\ \text{ou} \\ b=c,\ M \text{ diagonalisable} \end{cases}$

THM$_{48}$: Réd. endom. normal sur $\mathbb{R}$

Cor$_{49}$: Réd end sym / antisym réels

Rem$_{50}$: si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ normal est diagonalisable

C) Représentations linéaires :

[BER] p 1088 et 1107 1108

DÉF$_{51}$: représentat° lin. + déf degré (= dim V)

Ex$_{52}$: • représentat° triviale
• $n \geq 2$ $\left|\begin{array}{l} \mathfrak{S}_n \to K^* \\ \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma) 1_K \end{array}\right.$
• Représentation de permutation : $\left|\begin{array}{l} \mathfrak{S}_n \times K^n \longrightarrow K^n \\ (\sigma, (x_i)_i) \longmapsto (x_{\sigma^{-1}(i)})_{i=1}^n \end{array}\right.$

Déf$_{53}$: sous-représentat° + rep. irréductible

Lem 54 : Toute rep. de d° 1 est irréd.

THM 55 : Thm de Maschke (lemme + résultat) [BER]

Réf :

[MAN] - Mansuy

[GOU] - Gourdon - Alg.

[BEC] - Beck objectif - Agrég

[ROM] - Rombaldi Algèbre

[BER] - Berhuy - Algèbre : le grand combat.