# Plan détaillé [152] : Déterminant

$\mathbb{K}$ corps, $E$ $\mathbb{K}$-ev de dim $n$

## I) Formes multilinéaires et déterminant :

### A) Formes multilinéaires :

Déf$_1$ : application $p$-lin.
$\mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})$ = forme $p$-lin = $\mathbb{K}$ ev

Ex$_2$ : 2 cas Gou

THM$_3$ : $\dim(\mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})) = n^p$ (Preuve [ROM])

Déf$_4$ : forme alternée + forme antisym.

Props : $f$ antisym $\Leftrightarrow \forall \sigma \in S_p, \forall (x_1,\dots,x_p) \in E^p$, $f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1,\dots,x_n)$

THM$_6$ : $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, antisym $\Leftrightarrow$ alternée

Prop$_7$ : $f \in \mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})$ alterné. $(x_1,\dots,x_p)$ lié $\Rightarrow f(x_1,\dots,x_p) = 0$.

[GOU] (+[ROM]) p. 140 – 142

### B) Déterminant d'une famille de vecteurs :

THM$_8$ : $\mathcal{A}lt_n(E) = \mathbb{K}$-ev de dim 1. $\exists!\, f \in \mathcal{A}lt_n(E)$ tq $f(e_1,\dots,e_n) = 1$ où $(e_1,\dots,e_n)$ base donnée de $E$

Déf$_9$ : $B = (e_1,\dots,e_n)$ $\det_B(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}$

Ex$_{10}$ : $\mathbb{R}^2$, $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 = \binom{0}{1}$, $X = \binom{a}{c}$, $Y = \binom{b}{d}$ $\det_B(X,Y) = ad - bc$.

Prop$_{11}$ : $\forall f \in \mathcal{A}lt_n(E)$, $f(x_1,\dots,x_n) = f(e_1,\dots,e_n) \det_B(x_1,\dots,x_n)$
- $B, B'$ 2 bases, $\det_{B'}(x_1,\dots,x_n) = \det_{B'}(B)\det_B(x_1,\dots,x_n)$. D'où $\det_{B'}(B)\det_B(B') = 1$

THM$_{12}$ : $(x_1,\dots,x_n)$ liée $\Leftrightarrow \forall B$ base de $E$, $\det_B(x_1,\dots,x_n) = 0$
$\Leftrightarrow \exists$ ______

Cor$_{13}$ : $(x_1,\dots,x_n)$ base de $E \Leftrightarrow \exists B$ base de $E$ tq $\det_B(x_1,\dots,x_n) \neq 0$.

[ROM]

### C) Déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice :

THM$_{14}$ + Déf : det d'un endom (indép de la base choisie)

Ex$_{15}$ : $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} \mapsto \binom{ax+by}{cx+dy}$ $\det(u) = \det_{(e_1,e_2)}(X,Y) = ad - bc$.

THM$_{16}$ : $\det(\mathrm{id}) = 1$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$, $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$
$\det : GL_n(E) \to \mathbb{K}^*$ morphisme de groupe.
Son noyau est noté $SL_n(\mathbb{K})$.

[ROM] p. 549 – 551

Rem$_{17}$ : Si $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ $\det(u) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$

Déf$_{18}$ : $\det(A)$, $A$ matrice

Rem$_{19}$ : $\det(A) = \det$ (ses vecteurs colonnes) dans base canonique de $\mathbb{K}^n$
$= \det(X \mapsto AX)$ ($\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$) + avec la formule déf$_{18}$, on peut définir le det d'une matrice à coeff dans un anneau
- si $A = \mathrm{Mat}_B(u)$, $\det(u) = \det A$

THM$_{20}$ : Prop. du det d'une matrice.

Rem$_{22}$ : dans la pratique on calcule le det de la matrice associé à un endom. ou à un syst. de vecteurs.

## II) Calcul de déterminants :

### A) Méthodes générales de calculs :

[ROM] p. 551 – 553

Prop$_{23}$ : remarques de [ROM] p. 551

Prop$_{24}$ : $A$ triang. sup (ou inf) $\det(A) = \dots$

~~Props~~ THM$_{25}$ : matrice triangulaire par blocs

Méthode$_{26}$ : Algo du pivot de Gauss pour se ramener à une matrice ~~des~~ triang. (d'après prop23 ça ne change pas le dét) puis ~~Th~~ prop24 (ou on utilise la méthode de dév (cf (B)))

Ex$_{25}$ : $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) \times 2 = -12$.

### B) Mineurs-cofacteurs :

[GOU] p. 142 – 143

Déf$_{26}$ : mineur $\Delta_{ij}$, cofacteur $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ + mineurs principaux

THM$_{27}$ : développement selon une ligne/colonne (2) ← preuve voir [BER] ou [ROM]

Rem$_{28}$ : en général on le fait qd on a bcp de zéros sur une ligne/colonne ; et on s'y ramène avec Gauss.

Déf$_{29}$ : comatrice

Prop$_{30}$ : $A\,{}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A)\,A = (\det A)\, I_n$. (valable aussi si $A$ à coeff dans Anneau)

Csq$_{31}$ : Si $A$ inversible … + ex en dim 2

Rem$_{32}$ : cette formule a + d'intérêt dans les preuves théoriques permet de montrer la continuité de $A \mapsto A^{-1}$ sur… (cf IV)

Plan détaillé [152] Suite

## II) C) Exemples classiques :

THM33 : Dét de Vandermonde (4)

Appli34 : $P_k = X^k + \sum_{i=1}^{k} a_{k,k-i} X^i \in \mathbb{R}[X]$, $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$, $k \in [\![1;n-1]\!]$

$$\begin{vmatrix} 1 & P_1(x_1) & \dots & P_{n-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & P_1(x_n) & \dots & P_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \underbrace{V(x_1,\dots,x_n)}_{\text{Vandermonde}} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

Prop35 : déterminant de Cauchy. (6)

Prop36 : déterminant circulant (résultat : cf [GOU], méthode ♥)

Dév1 - Partie 1

[GOU] p. 143 - 153

## III) Applications en algèbre et géométrie :

### A) Systèmes linéaires - rang :

THM37 : Le rang d'une matrice A = ordre max. des mineurs non nuls extraits de A (7)

Ex38 : mettre en ... 2 ex. de mat 3x3.

Déf39 : Système de Cramer : $Ax = b$

THM40 : $x_k = \dfrac{\det(C_1,\dots,C_{k-1},b,C_{k+1},\dots,C_n)}{\det(A)}$, $\forall\ 1\le k\le n$. ← colonnes de A (8)

Rem41 : Cette formule n'est pas utilisée numériquement car elle nécessite $n^2 n!$ op. élém. On lui préfère le pivot de Gauss.

[GRI] p. 128 [ROM] p. 546

### B) Polynôme caractéristique :

Déf42 : polyn KR de $A\in M_n(\mathbb{K})$ (+ ex matrice nilp)

Rem43 : $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$, $XI_n - A \in M_n(\mathbb{K}[X])$, on utilise ici la définition du det de mat. à coeff dans un anneau.
- $\chi_A(0) = \det A$ + $\chi_f$ où $f\in\mathcal{L}(E)$ ← indép. de la base

Prop44 : $\lambda$ valeur propre de A (ou f) $\Longleftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$

Prop45 : $F<E$ ($F\neq E$, $F\neq\{0\}$) stable par f, $\chi_{f_F} \mid \chi_f$.

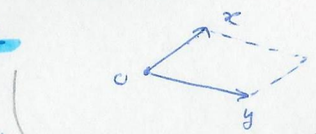
Prop46 : Si $\chi_f$ scindé à racines simples, f diagonalisable

THM47 : Cayley - Hamilton

[GOU] p. 172

[FEC] Appli48 : Suite de polygones (fin Dév1)

### C) Géométrie et volumes :




* Cas de la dim 2 :

THM49 : Soit x, y 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x,y) = |\det(x,y)|$ (9)

- En dim $n\geq 1$ :

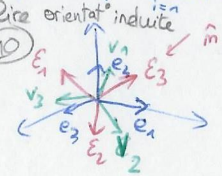
THM50 : $\mathrm{Vol}(x_1,\dots,x_n)$ = volume du parallélépipède engendré par $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^n$ $= \{z\in\mathbb{R}^n \mid z = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i,\ 0\le\lambda_i\le 1\}$

↳ $|\mathrm{Vol}(x_1,\dots,x_n)| = |\det(x_1,\dots,x_n)|$

+ lire orientat° induite

Déf51 : espace orienté

Rem52 : relat° d'éq + ex avec $\mathbb{R}^3$ (10)




[GRI]

## IV) Applications en analyse :

### A) Régularité :

THM53 : det est $\mathcal{C}^\infty$, $\forall M\in M_n(\mathbb{R})$, $\forall H\in M_n(\mathbb{R})$ $d(\det)(M).H = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(M).H)$ $= \det(M)\,\mathrm{tr}(M^{-1}H)$ ← si M inversible (11)

Rem54 : En particulier, det est continue, prop. importante

Csq55 : $GL_n(\mathbb{C})$ D.O.C + 1 appli (Dév 2)

[GOU] An p. 333 ; voyage en algèbre [CAL]

### B) Jacobien et changement de variable :

Déf56 : Jacobien de $\varphi\in\mathcal{C}^1$

THM57 : Changement de variables (12)

Ex58 : coord. polaire + appli intégrale de Gauss (genre LI ou BRI) ← en fait pas se fouler

[GOU] An p. 335 aller voir un livre d'int. pour le cas intégrale

### C) Det en calcul diff :

sûrement enlevé cette leçon est trop longue

[GOU] An

Déf59 : Wronskien

Prop60 : $V_1,\dots,V_n$ base de solut° de (H) $\Longleftrightarrow \forall t\in I, w(t)\neq 0$ $\Longleftrightarrow \exists t_0\in I, w(t_0)\neq 0$

[FRA An 4] Appli61 : Unicité de la solut° bornée au V(0) tq $y(0)=1$ dans éq. de Bessel