[151] Dimension d'un ev ; rang

I) Théorie de la dimension :

A) Familles gén, libres, bases

- [GRI] p. 10 - 16 :
  - → déf famille gén + exs
  - → — ev de dim finie + exs
  - → ~~exs~~ déf famille libre + exs
- → prop : famille libre ⇔ ...
- → déf base, prop : déc de x dans base + bij° $E \simeq K^n$ + exs +
- → prop : si $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$, $\mathcal{G}$ gén, $\mathcal{G}'$ gén ; $L \subset L'$, L' libre ⇒ L libre } exs
- → Thm existence base + Thm base incomplète ...

B) E.v. et ss-e.v. de dim finie :

- [GRI] : p. 17 - 19
- → Thm : $|B| = \dim_K(E)$ ... ; cor + rem
- → Prop : $\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \dots$
- → Thm : si $|\mathcal{G}| = n$ base, $|L| = n$ base
- → Thm : dim ssev
- → Appli : existence supplémentaire + KR ⊕] [GRI] p. 22

II) Applications linéaires et rang :

A) ~~Thm du rang~~ : Appli lin - rg

- [GRI] p. 59 - 63
- → déf $rg(f)$ + 1er exs
- → f inj, $(v_i)_i$ libre ⇒ $(f(v_i))_i$ libre / ... surj] : ~~appli~~ : plan tangent = ev de dim ... (dans extrema liés)
- → $E \simeq E'$ ssi ...
- → Thm du rang + appli $f : E \to E$, f inj ⇔ f surj ⇔ f bij ... + Rem dim ∞
- + déf : rg famille de vecteurs, rang d'une matrice
- Rem : $\mathcal{L}(E,F) \simeq M_{n,p}(K)$ + prop $rg(f) = rg(Mat_B(f))$] [GRI] p. 80.

B) Rang d'une matrice - Calcul effectif :

- [ARN1] p. 481 - 485 + [BEC] p. 155 - 156
- Thm : $rg(M) = rg(N) \Leftrightarrow \exists Q, P \in GL_n(K)$, $M = QNP$
- Thm : sur matrices bordantes et rang
- Cor1 : rg = + grande taille de ss-mat. inversible
- Cor2 : $rg(A) = rg(^tA)$ + Cor3 rg inv. par ext. de corps
- Thm : classes d'éq. + représentant $= J_r$
- Rem : dans la pratique on utilise T_{ij}, D_i, P_{ij} opérations élémentaires pour se ramener à une matrice échelonnée + exs

C) Lien avec la dualité, les formes lin, syst. lin :

- [GRI] p. 81-87 + hyperplan + 148 ← pr syst.
- déf forme lin + espace duale + prop $\dim E = \dim E^*$
- Rem : • définir un ev avec syst d'éq lin = noyau de f. lin
  - • + expression matriciel d'un syst lin
- déf : rg système = rg matrice associée
- Thm : $\dim(\bigcap_{i=1}^{p} H_i) = n - rg((\varphi_i))$ où $H_i = Ker\, \varphi_i$ (+ équivalence)] [ROM] p. 451
- ♥ ↳ Rem : thm utile dans la preuve des extrema liés

III) Applications : (garder un œil sur [BEC] pour les idées)

A) En algèbre linéaire :

- [ROM] p. 604 - 610
- [MAN] (ou [FRA_AP...]) [Dév2]
- (Revoir preuve C-H avec espaces cyclique [ROM]
- : Faire des calculs de $\mathcal{C}(A)$ [MAN] ou [FRA]) OK

A)
- existence Π_A
- Rem : C-H, $\deg \Pi_A \leq n$
- Thm $d°(\Pi_A) = \dots = \dim(K[A])$
- un thm de diago
- Déf $\Pi_{A,x}$, + lemme
- Déf $C(A)$
- Thm dim commuteur

B) Cas des espaces eucli :

- Tout ce qu'il faut pour réd end norm [ROM]
  - ↳ dév 1
- Rem : Raisonnemt ~~sur~~ par réc sur dim classique
- Un autre ex : (qui utilise aussi $\dim \bigcap H_i$) :
- Thm : gén de $O(E)$, $SO(E)$ [PER]

B) E eucli
- Dév : réd end norm
- Rem. d'autre raisonnement par réc sur dim :
  - ↳ gén de $O(E)$, $SO(E)$
  - ↳ + rem $\dim \bigcap H_i$ utile ici aussi

C) Extensions de corps :

- [PER] p. 65 - 67
- + rem : la dimension permet d'avoir un résultat d'inclusions entre les corps finis de la forme $\mathbb{F}_{p^n}$:
- THM : • K ss-corps de $\mathbb{F}_{p^n}$ ⇒ $\exists d | n$ tq $|K| = p^d$
  - • $\forall d | n$, $\mathbb{F}_{p^n}$ a un unique ss-corps de card p^d c'est... $\simeq \mathbb{F}_{p^d}$
  - + schéma d'inclusions] [GOZ]

rem : extension de corps donne ssev base télesc

C)
- déf α algébrique
- Sur corps, existence de Π_α si α algéb
- Thm $K[\alpha]$ ev de dim ...
- + Appli $K[\alpha+\beta]$ ... $K[\alpha\beta]$
  - ↳ α+β alg...
- (+ Rem corps finis + inclusions via dim.)

[GRI] [GRI] [GRI] [GRI] [ARN1] + [BEC]

[GRI] [ROM] [ROM] + [MAN] [ROM] + [PER] [PER] [GOZ]