102

I) Le groupe $\mathbb{U}$:

A) Définitions :

DÉF1 : On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ← ss-grpe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

REM2 : $z \mapsto |z|$ morphisme de grpe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ de noyau $\mathbb{U}$

THM3 : $f : \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{U} \to \mathbb{C}^*$, $(r,u) \mapsto ru$ isomorphisme + $f^{-1}(z) = \left(|z|, \frac{z}{|z|}\right)$

THM4 : $\varphi : z \in \mathbb{C} \mapsto (Re(z), Im(z)) \in \mathcal{P}$ bijection isométrique, $\mathcal{P}$ plan de $\mathbb{R}^2$

REM5 : · $\mathcal{P}$ muni de cette identification est le plan d'Argand-Cauchy
· $\varphi(\mathbb{U}) = S^1$ où S^1 est le cercle unité du plan

B) Exponentielle et trigonométrie :

DÉF6 : · exp (série entière) + π
· cos / sin

THM7 : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \exp(ix)$ morphisme d'image $\mathbb{U}$, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$

Cor8 : $\boxed{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}}$

PROP9 : · $\exp(ix) = \cos x + i\sin x$
· Formule de De Moivre : $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$
· Formules d'Euler

APPLI10 : Calcul de $S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$] 1)
: Linéarisation de $\cos^n(x)$ ...

DÉF11 : Déf $\arg(z)$ + argument principal

DÉF12 : Forme trigo d'un nbre cplx

$\boxed{\text{+ mettre des exemples}}$

C) Géométrie et angles orientés :

[ARN]

· On note $\mathcal{P}$ plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$
↳ On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathcal{P}$ via le plan de Cauchy-Argand : à $M = O + x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ on associe $z_M = x + iy$ (l'étude géométrique de $\mathcal{P}$ se rapporte à celle de $\mathbb{C}$) ou à celle de $\mathbb{R}^2$.
↳ On peut également identifier $\mathcal{P}$ à $\mathbb{R}^2$ via $M = O + x\vec{e_1} + y\vec{e_2} \mapsto (x,y)$.

[ARN] p.226

DÉF13 : $SO_2(\mathbb{R})$

THM14 : $SO_2(\mathbb{R})$ isomorphe et homéomorphe à $\mathbb{U}$] 2)

[AUD] p.62

Cor15 : $SO_2(\mathbb{R})$ commutatif

Rem16 : $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U} \simeq SO_2(\mathbb{R})$
$\theta \mapsto e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
L'image de θ s'appelle « rotation d'angle θ »

[AUD] p.63

[RCH] p.103 ou [ARN] p.239

THM16' : $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^2)^2$ unitaire, $\exists!\, M \in SO_2(\mathbb{R})$ tq $Mu = v$.

[ARN] p.226 - 228

DÉF17 : Pour $(u,v) \in (\mathbb{R}^2)^2$ unitaire, $(u',v') \in (\mathbb{R}^2)^2$, on définit la relation d'éq : $(u,v)\mathcal{R}(u',v') \iff \exists M \in SO_2(\mathbb{R})$ tq $\begin{cases} Mu = u' \\ Mv = v' \end{cases}$.

$\mathcal{A}$ = l'ens. des classes d'éq est l'ensemble des angles orientés (on note $(\widehat{u,v})$ la classe de (u,v))

REM18 : Pour des vecteurs non unitaires (non nuls) (u,v) leur angle orienté est l'angle orienté des vecteurs unitaires associés $\frac{u}{\|u\|_2}, \frac{v}{\|v\|_2}$ ~~[illegible]~~

PROP19 : $\Phi : \mathcal{A} \to SO_2(\mathbb{R})$ est bijective
$(\widehat{u,v}) \mapsto$ l'unique M tq $Mu = v$] 3)

[AUD] p.74 - 75

REM20 : · $\mathcal{A}$ en bijection avec $\mathbb{U}$, donc peut être munie d'une structure de groupe avec $(\widehat{u,v}) + (\widehat{u',v'}) := \Phi^{-1}(\Phi(u,v) \times \Phi(u',v'))$
· On peut donc identifier un angle orienté $(\widehat{u,v}) \in \mathcal{A}$ à un élément $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ appelé ~~par abus « angle »~~ mesure de l'angle.

[AUD] p.75 - 77

II) Sous-groupes des racines de l'unité

A) Définitions et 1er résultats

$n \in \mathbb{N}^*$

[ARN] p.230 - 233

[ARN] p.235 - 236

DÉF21 : $\mathbb{U}_n$

REM22 : $\mathbb{U}_n$ noyau de $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $z \mapsto z^n$

~~DÉF22 : racines nième prim~~

THM23 : $\mathbb{U}_n$ cyclique de card n, de générateur $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \wedge n = 1$] 4)

DÉF24 : racines $n^{ièmes}$ primitives $\mathbb{U}_n^*$

Scanné avec CamScanner

Plan (102) suite :

~~II~~ A)

PROP$_{25}$: $\mathrm{Card}(\mathbb{U}_n^*) = \varphi(n)$ où φ = ind. Euler

Rem$_{25'}$: $\mathbb{U}_n^*$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$

THM$_{26}$: Pour $n \geq 2$, le seul sous-grpe fini de cardinal n de $(\mathbb{C}^*, \times)$ est $\mathbb{U}_n$.] 5)

Prop$_{27}$: $\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n} \mathbb{U}_d^*$ (union disjointe)

Cor$_{28}$: $\cancel{\varphi(n)}\, n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

Prop$_{29}$: Les sous-groupes de $\mathbb{U}_n$ sont les $\mathbb{U}_d$ où $d|n$] 6)

[PER] p.88

B) Polynômes et racines de l'unité :

DÉF$_{30}$: Polyn. cyclotomiques Φ_n

PROP$_{31}$: Φ_n unitaire, d° $\varphi(n)$

PROP$_{32}$: $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$ (rem : on retrouve Cor$_{28}$)

Ex$_{33}$: quelques Φ_n

[PER] p.89 - 90

Lemme$_{34}$: $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ $\boxed{\text{Dev 1}}$

THM$_{35}$: Φ_n irréd sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$

[PER]

Cor$_{36}$: Φ_n polyn. mini de $\xi \in \mathbb{U}_n^*$ sur $\mathbb{Q}$, $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$

APPLi$_{37}$: Thm de Wedderburn

~~APPL~~ **THM$_{38}$** : Thm de Kronecker $\boxed{\text{DEV 2}}$

Cor$_{39}$: $\forall P \in \mathbb{Z}[X]$ irréd. de racines cplx de $|\cdot| \leq 1$ est soit X, soit un polyn. cyclot.

[FRARA] p.257

REM$_{40}$: Si on se place sur les corps fini, on remarque que tout élément est une racine de l'unité dans un corps fini (une extension finie d'un corps fini)
cf Clôture alg. de $\mathbb{F}_p$

[PER]

~~III~~ Applications :

plutôt caractères linéaire d'un grpe fini

A) Représentations linéaires d'un groupe (abélien) fini

- Soit G un groupe fini de cardinal n.

~~**DÉF$_{41}$** : représentat° lin de G $\rho : G \to GL(V)$, V $\mathbb{C}$-ev~~

~~**DÉF$_{42}$** : représentation irréductible~~

~~**PROP$_{43}$** : Si V ev de dim d, & g élém^t de G d'ordre p~~
~~$\hookrightarrow \rho(g)$ diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines p-ième de l'unité~~

~~**DÉF$_{44}$** : Caractère~~

[PEY] p.194 [PEY] p.220 [PEY] p.207

DÉF$_{41}$: Caractère linéaire et dual $\hat{G}$ (χ := élém^t de $\hat{G}$)

PROP$_{42}$: $\hat{G}$ est un grpe muni de $\cdot$ ...

PROP$_{42}$: • Les élém^t de $\hat{G}$ sont les morphismes de grpes de G dans $\mathbb{U}_n$) 7)
• $|\chi(g)| = 1$, $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$) 8)

PROP$_{43}$ (cas d'un grpe cyclique) $G = \langle g_0 \rangle$ avec g_0 d'ordre n, $\omega \in \mathbb{U}_n^*$) 9)
$\forall j \in [\![0; n-1]\!]$, $\chi_j : g_0^k \mapsto (\omega^j)^k \leftarrow$ élém^t de $\hat{G}$

Cor$_{44}$: $G \simeq \hat{G}$ $\leftarrow$ isomorphisme pas canonique, dépend du choix de ω

Ex$_{45}$: Table de caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en particulier $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ...) 10)

[PEY] p.2 et +

B) Matrices unitaires

DÉF$_{46}$: Matrice unitaire $\rightsquigarrow U(n, \mathbb{C})$ + $SU(n, \mathbb{C})$

Ex$_{47}$ exemple $\rightarrow SU(2, \mathbb{C})$] 11) $\leftarrow$ calculs astucieux

Rem$_{48}$: V.P. d'une matrice unitaire toute de module 1] 12)
ou Prop

~~[GRI]~~ ~~mais aller voir dans ARN^4...~~ [GOU]

THM$_{49}$: $\forall A \in U(n, \mathbb{C})$, A diago~~nalisable en~~ ses ss-espaces propres sont $\perp$ et v.p. sont dans $\mathbb{U}$.] 13)

[GOU] p. 254 p.269