

Utilisation de la notion de convexité en analyse.

I/ Généralités : Soit E un K -ev ou $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Ensembles convexes :

Définition 1 : Soit $(x, y) \in E$, on appelle segment de E , d'extrémités x et y l'ensemble $[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}$.

Définition 2 : Soit $A \subset E$. On dit que A est convexe, si $\forall (x, y) \in A$, le segment $[x, y]$ est contenu dans A , i.e.

A est convexe si $\forall t \in [0, 1]$, $tA + (1-t)A \subset A$.



Proposition 3 : Dans E , tout ensemble convexe est convexe par arcs.

Lemme 4 : La réciproque est fautive $E = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$ est convexe par arcs et non convexe.

Exemples 5 : i) Soit F un des $\mathbb{R}$ et $a \in E$, $a + F$ est convexe.
ii) Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Proposition 6 : Si A est convexe, alors tout x et y quel que $x_1, \dots, x_n \in A$, et $\forall t_1, \dots, t_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, on a $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in A$.

Proposition 7 : Si C et C' sont convexes, alors $\forall x \in K$, $xC, C \cap C'$ et $C \cup C'$ sont convexes.

2) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition 8 : Une application $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si : $\forall (a, b) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$. (1)

Elle est dite concave si $-f$ est convexe.

Lemme 9 : f est dite strictement convexe si on a une inégalité stricte dans (1).

Proposition 10 : f est convexe $\Leftrightarrow f(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)$ est convexe.

Proposition 11 : $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe $\Leftrightarrow \forall x_0 \in I$, $g_{x_0}: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante.

Application 12 : Si f est convexe, alors $\forall (a, b, c) \in I$ on a $a < b < c$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Théorème 13 : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . f convexe $\Leftrightarrow f'$ croissante $\Leftrightarrow$ la courbe de f est au dessus de ses tangentes.

Corollaire 14 : Si f est 2 fois dérivable, f convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0$.

Exemple 15 : $x \mapsto \|x\|$ est convexe, $x \mapsto e^x$

II/ Inégalité de convexité :

~~Proposition 16 :~~

Proposition 16 : (Jensen). Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

$$\text{Alors } f\left(\frac{x_1 x_2 + \dots + x_n x_n}{x_1 + \dots + x_n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

Proposition 17: (Inégalité arithmético-géométrique)

Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Proposition 18: (Inégalité de Young) : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$,

soit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $a, b \geq 0$, $a^p + \frac{1}{b^{p'}}$

Théorème 19: (Hölder) Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ alors

$$|\int fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Application 20: (Minkowski) : Soit $f, g \in L^p$,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Application 21: L^p est un Banach $\forall p \in \mathbb{Z}, p \geq 1$.

III Applications:

1) Théorème de la projection

Thm de la proj

Thm de la proj sur un sous

Application : $V = F \oplus F^\perp$

Proposition : Soit f adn. lin. $P_f(a) = \sum_{i=1}^n \langle a, e_i \rangle e_i$

Application : Int $\int_0^1 (t^2 - xt - b)^2 dt =$

2) Résolution de système :

Def f^0 quasia

Proposition : $\nabla f = 4x + b$.

Remarque de Karush-Kuhn-Tucker

Exemple à pas optimal

Remarque : Ça dépend de $\text{card}(A)$

Nasif Al Haddad

Coordon

Boeys.

Christy Hayes

Bennis

