

On suppose connu le fait que L^2 soit un espace de Hilbert et que

I / Coefficients et série de Fourier.

1) Coefficients de Fourier :

Définition 1 : Si $f \in L^2$, alors on définit le n -ième coefficient de Fourier complexe par :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2i\pi n}{T}t} dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 2 : $c_n \left(\frac{1}{T} \chi_{[0, T-a[} \right) = \frac{\chi_n(a_n)}{n\pi} \frac{1}{T} \chi_n(n) + \frac{a}{\pi} \delta_0(n)$

Définition 3 : Si f est à valeurs réelles, alors on peut considérer les coefficients de Fourier réels définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt.$$

Remarque 4 : Si f est à valeurs réelles, on utilise plutôt les coefficients $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Dans le reste de la leçon, on considère $T = 2\pi$ sans perte de généralité.

Proposition 5 : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$
 $\forall n \in \mathbb{N}^*.$

Définition 6 : On définit la somme partielle d'indice $N \geq 0$,

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} \quad \forall x \in [0, 2\pi].$$

Définition 7 : On appelle série de Fourier associée à f , la

$$\text{série } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} \text{ ou encore } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$$

2) Propriétés des coefficients :

Proposition 8 : i) $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$

ii) $c_n(\tau_a f) = e^{ina} c_n(f)$ où $\tau_a f(t) = f(t+a)$
 $a \in \mathbb{R}.$

iii) Si f est continue et e^t par morceaux, alors

$$c_n(f') = in c_n(f).$$

Proposition 9 : i) Si f est paire, alors $\forall n \in \mathbb{N}, b_n(f) = 0.$

ii) Si f est impaire, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0.$

Exemple 10 : i) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, 2\pi$ -périodique, $\forall x \in [0, \pi]$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \text{ on a alors } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = (-1)^n \frac{1}{n^2 \pi^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 0$$

ii) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \pi$ -périodique, $\forall x \in [0, \pi]$ $f(x) = \sin(x)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{1}{\pi(1-i^n)} \text{ et } b_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lemma 11 : Riemann-Jordan : Soit $f \in L^1_{\pi}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(f) = 0.$$

Théorème 12 : Si $f \in \mathcal{C}^k, k \in \mathbb{N}$ périodique, alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Proposition 13 : $X : L^1_{\pi} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{T})$ est une forme linéaire de norme 1
 $f \mapsto c_n(f)$

II / Théorèmes de Convergence:

1) Moyen de Dirichlet et Fejér:

Définition 14: Le moyen de Dirichlet est $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Proposition 15: D_N est paire et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$

$$ii) D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Définition 16: Le moyen de Fejér est: $K_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \forall x \in \mathbb{R}$

Proposition 17: i) $K_N(x) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{inx}$

$$ii) K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2 \geq 0.$$

$$iii) \|K_N\|_1 = 1$$

Définition 18: On définit la somme de Fejér d'indice $N \geq 0$ de f par $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$.

2) Théorème de Dirichlet et de Fejér.

Théorème 19: Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si on a:

i) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existent

$$ii) f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0} \text{ et } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0^+} \text{ existent}$$

$$\text{Alors } S_N(f)(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Théorème 20: (Sondun - Dirichlet) Si $f \in L^1_{2\pi}$ périodique, et $e^{\pm i x}$ par morceaux. Alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier, si f est continue, $S_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f$ et la convergence est normale.

Application 21: $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} = \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$

$$g(x) = |f(x)| = \frac{g}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)^2}{4n^2 - 1}.$$

Exemple 22: Calcul de Somme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Théorème 23: Fejér: Si $f \in C^0_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

Corollaire 24: i) Soit $f \in C^0_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(x_0) = f$.

ii) Soit $f \in C^0_{2\pi}$. Si $f \in C^1$ par morceaux, alors $(S_N(f))_{N \geq 1}$ converge normalement vers f .

iii) L'application χ est injective pour $f, g \in C$

Corollaire 25: La famille $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $L^2_{2\pi}$ pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$

Conclure 26: Formule de Parseval: Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors

$$1) \|f_N(f) - f\| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

$$2) \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{9} |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2$$

Application 27: L'application $\chi: L^2_{2\pi} \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$

$f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$
est une isométrie bijective.

Exemple 28: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

III / Applications

1) Résolution d'équations aux dérivées partielles

On considère $Q =]0, L[\times]0, +\infty[$

Définition 29: L'équation de la chaleur est défini par le problème suivant:

$$(P) \begin{cases} i) u \in \mathcal{C}^0(\bar{Q}) \cap \mathcal{C}^2(Q) \\ ii) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ dans } Q \end{cases}$$

$$iii) u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

$$iv) u(x, 0) = h(x) \quad \forall x \in]0, L[\text{ où } h \in \mathcal{C}^2([0, L]) \text{ où } h(0) = h(L) = 0$$

Remarque 30: La série de Fourier de h est normalement convergente

Théorème 31: La fonction $u: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, t) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

où $(b_n)_{n \geq 1} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ est l'unique solution de (P).

2) Intégrales de Fresnel

Définition 32: On appelle intégrale de Fresnel, les

$$\text{intégrales } A = \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt \text{ et } B = \int_0^{\infty} \cos(t^2) dt.$$

Proposition 33: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 1 périodique telle que

$$\forall x \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}, f(x) = e^{2i\pi x^2}.$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = e^{-\frac{i\pi n^2}{2}} \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} e^{2i\pi s^2} ds.$$

Proposition 34: Les intégrales de Fresnel A et B sont

$$\text{convergentes et } \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = \int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

I / Cauchy

II / Zully-Queffelec

III / Zully-Queffelec

+ 131 chev.