245

Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications

I/ Analyticité et holomorphie

1/ Série entière :

Définition 1 : On appelle série entière de la variable complexe toute série de la forme $\sum a_n z^n$ où $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C}$.

Proposition 2 : Lemme d'Abel : Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $(a_n z_0^n)_n$ est bornée. Alors $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $\overline{D}(0,r)$ avec $r < |z_0|$

Définition 3 : On appelle rayon de convergence le nombre $R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n)_n \text{ soit borné}\}$

Proposition 4 : Si $\sum a_n z^n$ converge pour $z_0 \in \mathbb{C}$, elle converge normalement dans tout disque $\overline{D}(0,r)$ où $r < |z_0|$

Exemple 5 : $\sum \frac{z^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini et $\sum \frac{(z+z')^n}{n!} = \sum \frac{z^n}{n!} \times \sum \frac{z'^n}{n!}$

Proposition 6 : Hadamard Le rayon de convergence d'une série entière est $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

Définition 7 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et f définie sur U. f est dérivable en z_0 si $U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une limite finie lorsque z tend vers z_0.
On dit que f est holomorphe en z_0.

Théorème 8 : En tout point z_0 du disque de convergence, la fonction somme S de la série entière $\sum a_n z^n$ est dérivable et $S'(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n$

Corollaire 9 : Dans le disque de convergence, la fonction somme d'une série entière est indéfiniment dérivable et ses dérivées successives

2) Fonctions analytiques

Définition 10 : Soit f définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On dit que f est analytique dans U si elle est développable en série entière en tout point de U.

Exemple 11 : La fonction $z \mapsto e^z$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$.

Remarque 12 : On note $\mathcal{A}(U)$ l'ensemble des fonctions analytique sur U.

Théorème 13 : Prolongement Analytique : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in \mathcal{A}(U)$.
$f \equiv 0 \Leftrightarrow f$ est identiquement nulle dans un voisinage de $a \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(a) = 0$

+ DEV 1

3) Fonctions Holomorphes

Exemple 14 : $z \mapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de dérivée $z \mapsto n z^{n-1}$

Remarque 15 : On note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Proposition 16 : Si f est différentiable sur U ouvert de $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^2$)
Alors $f \in \mathcal{H}(U) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Proposition 17 : Condition Cauchy-Riemann. En notant $f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$
Alors $f \in \mathcal{H}(U) \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Proposition 18 : Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. Si $f' \equiv 0$ alors f est constante.

Application 19 : Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$.
f cste sur $U \Leftrightarrow Re(f)$ cste sur $U \Leftrightarrow Im(f)$ cste sur $U \Leftrightarrow |f|$ cste sur U

II / Théorie de Cauchy

1) Intégrale curviligne

Définition 20 : Un chemin dans l'ouvert U est une fonction continue $\gamma : [a,b] \to U$ de classe C^1 par morceaux. C'est un lacet quand $\gamma(a) = \gamma(b)$

Exemple 21 : $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + e^{it}$ est le chemin représentant le cercle $C(z_0, r)$

Définition 22 : L'intégrale de $f : U \to \mathbb{C}$ le long du chemin $\gamma : [a,b] \to U$ est définie par $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

Exemple 23 : $\int_{C(0,r)} z^n dt = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \times ire^{it} dt = 0$.

Définition 24 : L'indice d'un lacet $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ par rapport à $z_0 \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ est $Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$

Théorème 25 : L'application $U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto Ind_\gamma(z)$ est à valeur dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de U et nulle sur la composante connexe non bornée de U.

Remarque 26 : L'indice de z représente le nombre de tour décrit par γ autour de z.

2) Théorème de Cauchy

Théorème 27 : Soient U ouvert de $\mathbb{C}$ et f continue sur U.
f possède une primitive sur $U \Leftrightarrow$ Pour tout chemin fermé γ dans U $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Théorème 28 : Cauchy. Soit U ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $w \in U$ et $f \in C(U)$ et $f \in H(U \setminus \{w\})$. Alors f possède une primitive dans U et pour tout chemin fermé γ dans U $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Théorème 29 : Soit γ chemin fermé dans un ouvert convexe U de $\mathbb{C}$, $z \in U \setminus Im(\gamma)$ et $f \in H(U)$. Alors $f(z) Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(x)}{x - z} dx$.

3) Conséquences Théoriques.

Théorème 30 : Soient $U \subset \mathbb{C}$ ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in H(U)$. Pour tout chemin fermé γ de U tel que $a \notin Im(\gamma)$ on a
$f^{(n)}(a) Ind_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$.

Théorème 31 : Morera. Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et f continue sur U.
$f \in H(U) \Leftrightarrow f \in A(U) \Leftrightarrow \forall \Delta \subset U \int_{\partial\Delta} f = 0$.

Théorème 32 : Inégalité de Cauchy : $\forall r \in]0, R[$ et $f \in H(D(0,R))$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \frac{\sup\{|f(z)|, |z| = r\}}{r^n}$

Théorème 33 : Liouville : Toute fonction entière et bornée est constante.

III/ Applications

1) Théorème des résidus

Définition 34 : Soit U ouvert de $\mathbb{C}$. f est dite méromorphe dans U si il existe A partie discrète de U telle que $f \in \mathcal{H}(U \setminus A)$ et telle que tous les points de A soient un pôle de f.

Définition 35 : $\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$.

Théorème 36 : Résidus. Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_n$ des points 2 à 2 distincts de U et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pole de f. Si γ est un chemin fermé dans U dont l'image ne contient aucun des a_k, on a : $\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ind}_\gamma(a_k) \operatorname{Res}(f, a_k)$

Application 37 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Application 38 : $\int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} e^{-\frac{zt^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2z}}$

2) Espace des fonctions Holomorphes

Théorème 39 : Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(U)$ convergent uniformément sur tout compact vers f. Alors $f \in \mathcal{H}(U)$.

Application 40 : L'espace de Bergmann $H := L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert dont une base hilbertienne est donnée par $\{ z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Lemme 41 : Schwarz. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ $\forall z \in \mathbb{D}$. On a

i) $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$ ii) $|f'(0)| \leq 1$

Si $\exists z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ $|f(z)| = |z|$ ou $|f'(0)| = 1$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda z$ $\forall z \in \mathbb{D}$.

Application 42 : $\operatorname{Aut}(\mathbb{D}) = \{ \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \mid |\lambda| = 1 \text{ et } a \in \mathbb{D} \}$

Tauvel