

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

I/ Méthodes directes

1) Par un calcul de primitives

Théorème 1: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors l'application $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $[a, b]$. De plus, F est dérivable à gauche et à droite en tout point x de $[a, b]$ et on a $F'(x) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$ et $F'(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$. En particulier, si f est continue sur $[a, b]$, alors $F \in \mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$.

Corollaire 2: Toute application continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet au moins une primitive F et on a $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

Exemple 3: $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^*$ $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$

Remarque 4: La primitive n'est pas unique, par exemple, $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \frac{x^2}{2} + 3$ sont 2 primitives de $x \mapsto x$.

Exemple 5: $\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2} dx = \left[-\ln(x-1) + \ln(x-2) \right]_3^4$
 $= -\ln(3) + \ln(2) + \ln(2) - \ln(1)$
 $= \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ grâce à un calcul par décomposition en éléments simples.

2) Intégration par parties et changement de variables

Théorème 6: (Intégration par parties) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications $\mathcal{C}^1$. Alors $\int_a^b f(t)g'(t) dt = \left[f(t)g(t) \right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt$.

Exemple 7: Une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ est $t \mapsto t \ln(t) - t$.

Exemple 8: (Wallis) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^n(x) dx$

Exemple 9: $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 2 e^{-2}$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$

Théorème 10: (Changement de variables) Soit $\alpha: [a, b] \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^0$. Alors $\int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(t) dt$.

Application 11: Soit $f: [a, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est paire, $\int_a^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$. Si f est impaire, $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Exercice 12: $\int_{-a}^a \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

Définition 13: Soient $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et δ une application de $[a, b]$

en appelle somme de Riemann de f , la quantité $S(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1})$

Alors, $S(f, \sigma_n, \xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$.

Application 15: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \frac{b-a}{n}) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \frac{b-a}{n}) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

Remarque 16: cette méthode porte le nom de méthode des rectangles.

Exemple 17: Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})$

II / Méthodes indirectes:

1) Théorème de Fubini

Théorème 18: (Changement de variables) Soient U un ensemble

mesurable compact de $\mathbb{R}^n$ et f une $\mathbb{C}^2$ -difféomorphisme de U dans V .

Alors pour toute fonction continue $g: V \rightarrow \mathbb{R}$, on a:

$$\int_U g(v) dv = \int_U g(f(u)) |J(f(u))| du.$$

Exemple 19: On considère le $\mathbb{C}^2$ -difféomorphisme

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}), \text{ Alors } \forall f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ intégrable}$$

$$(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)).$$

$$\text{on a } \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \times \rho d\rho d\theta$$

appelé changement de variable en coordonnées polaires.

Théorème 20: (Fubini positif) Soit $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$

une application mesurable positive.

$$\text{Alors } \int_{X \times Y} f(x, y) dx dy = \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy$$

Application 21: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}$

Application 22: (Volume de la boule unité)

On définit $B_d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^d$. On a alors

$$\text{Vol}(B_d) = \begin{cases} \frac{\pi^{d/2}}{2^{d/2}} & \text{si } d \text{ est pair} \\ \frac{\pi^{d/2}}{2^{d/2}} \frac{d-1}{2} & \text{si } d \text{ est impair} \end{cases}$$

2) Interprétation limite et intégrale

Théorème 23: Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables

sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément

sur $[a, b]$ alors:

$$i) x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ est intégrable sur } [a, b]$$

$$ii) \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Théorème 24: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de variable

réelle. de rayon de convergence $R > 0$. Si $[a, b]$ est un

segment inclus dans $] -R, R[$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est un

$$\text{Application 25: } \int_0^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

3) Théorème des résidus

Théorème 26: (Residus) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$

$a_1, \dots, a_m$ deux à deux distincts de U et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a_1, \dots, a_m\})$ et γ_k path de f

Si γ est un chemin fermé de U tel que $a_k \notin \text{Im}(\gamma)$

$$\text{alors } \int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=2}^m \text{Ind}_{\gamma}(a_k) \text{Res}(f, a_k)$$

Application 27: $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha t} \ln(t)}{e^{\alpha t} - 1} dt = \frac{\pi^2}{4 \cos^2(\frac{\alpha \pi}{2})} \quad \forall \alpha \in]-1, 1[$

Application 28: $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha}}{1+t^{\alpha}} dt = \frac{\pi}{n \sin(\frac{(\alpha+1)\pi}{n})}$ où $n > \alpha + 1 > 0$.

III / La théorie de Fourier

1) Les séries de Fourier

Définition 29: Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, on appelle coefficient de Fourier exponentiels de f , les scalaires $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$. Les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont:

Une $a_n, a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$

Définition 30: Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. On appelle série de Fourier de f

la série $S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$

Théorème 31: (Dirichlet) Soit $f, e^{\pm}$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$ et 2π -périodique. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$

De plus, si f est continue, $S(f)$ converge normalement vers f

Application 32: Soit $a > 0$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{2}$

Alors on a: $\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\cosh(a) + \cos(t)} dt = \frac{(-1)^n}{e^{na} \sinh(a)}$

Application 33: $f(t) = \frac{1}{1+\cos^2(t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, alors $\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1+\cos^2(t)} dt = \frac{\pi \sqrt{2}}{2}$

Application 34: $f(\cos(t)) \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

2) La transformation de Fourier

Définition 35: Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de f est l'application $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$

Théorème 36: La fonction $\mathcal{F}: \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R})$ est une

application linéaire, continue, injective

Application 37: $\forall a > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-it\xi} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

$+ \gamma(\mathbb{R})$