235

# Problème d'interversion en analyse.

Soit $E$ un EVN

## I/ Interversion pour les suites et les séries de fonctions.

### 1) Rappels de convergence

**Définition 1 :** On dit que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $X$ si : $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N \Rightarrow (\forall x\in X, \|f_n(x)-f(x)\|\leq\varepsilon)$

On note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} f$.

**Proposition 2 :** $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $X$ si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

**Contre-exemple 3 :** La suite de fonction donnée par $f_n : \begin{array}{l}[0,1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^n\end{array}$

ne converge pas uniformément vers la fonction $\mathbb{1}_{\{1\}}(x)$

**Proposition 4 :** Soit $E$ un EVN, soit $X$ une partie non vide d'un espace vectoriel fini $F$, et soit $(f_n)$ une suite de fonction de $X$ dans $E$. Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $X$ et $(f_n)$ converge uniformément vers $f$. Alors $f$ est continue sur $X$.

**Définition 5 :** On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $X$ si la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}} := (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $X$

**Définition 6 :** On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur $X$ si :

* $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est bornée * $\sum \|f_n\|_\infty$ converge

**Exemple 7 :** La série $\sum x e^{-nx}$ est normalement convergente sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$.

### 2) Interversion pour les suites de fonctions.

**Théorème 8 (Double limites) :** Soit $X$ une partie de $F$, un evn fini, soit $E$ un evn. Soit $(f_n)$ une suite d'applications de $X$ dans $E$ convergeant uniformément vers $f$ sur $X$, et soit $a\in\bar{X}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, la limite $l_n$ de $(f_n(x))$ lorsque $x$ tend vers $a$. Si $E$ est complet, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

**Application 9 :** Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>1$ et de somme notée $f$. Soit $\theta_0\in[0,\frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_{\theta_0}=\{1-\rho e^{i\theta} \mid \theta\in]-\theta_0,\theta_0[ \ldots\}$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{\substack{z\to1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

**Théorème 10 :** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)$ une suite d'applications dérivables de $I$ dans $E$ convergeant simplement vers $f$.

Si $(f_n')$ converge uniformément vers $g$ sur $I$ Alors $f'=g$.

i.e $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$

**Contre-exemple 11 :** La suite de fonction $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\end{array}$ converge vers $f : x\mapsto|x|$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est dérivable mais pas $f$.

### 3) Interversion pour les séries de fonctions

**Théorème 12 :** Soit $a\in\bar{X}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de $X$ dans $E$

On suppose : i) $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n$ admet une $l_n$ en $a$.

ii) $\sum f_n$ converge uniformément sur $I$.

Alors : i) $\sum l_n$ converge dans $E$ ii) $\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n$.

**Théorème 13 :** Soit $a\in X$ et soit $(f_n)$ une suite d'application de $X$ dans $E$

On suppose que : i) $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue en $a$

ii) $\sum f_n$ converge uniformément sur $X$

Alors $\sum f_n$ est continue en $a$.

**Exemple 14 :** La fonction $x\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**Théorème 15 :** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions dérivables de $I$ dans $E$.

Si : $\sum f_n$ converge simplement et $\sum f_n'$ est uniformément convergente.

Alors $S$ est dérivable sur $I$ et $\forall x\in I$, $S'(x) = \sum f_n'(x)$.

**Remarque 16 :** Si on suppose $(f_n)$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors $S$ est $\mathcal{C}^1$.

**Proposition 17 :** Soit $(f_n)$ une suite de fonction $p$ fois dérivable de $I$ dans un Banach $E$. Si $\sum f_n$ converge simplement sur $I$ et $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $I$. Alors $S^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(p)}(x)$.

**Remarque 18 :** Si $(f_n)$ est $\mathcal{C}^k$, alors $S \in \mathcal{C}^k$.

**Exemple 19 :** La fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$

## II / Interversion et intégration

### 1) Interversion limites et intégrales

**Théorème 20 :** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$. Si $(f_n)$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$

**Application 21 :** Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$ alors $f = 0$.

**Théorème 22 :** (Convergence dominée) Soit $(f_n)$ une suites de fonctions mesurables intégrables sur un intervalle $I$ qui converge simplement sur $I$ vers $f$ et qui est telle que :
$\exists g : I \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ sur $I$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors $f$ est intégrable sur $I$ et $\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx$

**Exemple 23 :** $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx^3}}{1+x^2}\,dx = 0$.

**Théorème 24 :** (Monotone) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives sur $A$ qui converge simplement sur $I$ vers $f$. Alors $f$ est intégrable sur $A \iff \lim_{n\to+\infty} \int_A f_n(x)\,dx$ est finie.

**Contre-exemple 25 :** La fonction $f_n = n\,\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ sur $[0,1]$ ne vérifie pas les hypothèses du théorème de convergence monotone

### 2) Interversion intégrale et somme.

**Proposition 26 :** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx$.

**Théorème 27 :** Si $\sum f_n$ est une serie de fonctions continues sur $[a,b]$ uniformément convergente. Alors $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

**Exemple 28 :** $\int_0^1 x^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$

**Théorème 29 :** Soit $\sum f_n$ une serie de fonctions continues intégrables sur un intervalle $I$, dont la somme est une fonction continue. Si l'on a une des 2 conditions :

* $\sum |U_n|$ converge sur $I$ et sa somme est une fonction continue et intégrable sur $I$.

* $\sum \int_I |U_n|\,dx$ est convergente.

Alors $\sum U_n$ est intégrable et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx$.

**Exemple 30 :** $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

### 3) Interversion intégrale et intégrale.

**Théorème 31 :** (Fubini-Tonelli) Soit $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $f : X \times Y \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. Alors $\int_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right) dy$

**Exemple 32 :** $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

**Exemple 33 :** Le volume de la boule unité est ...

**Théorème 34 :** Soit $f \in \mathcal{L}^1(X\times Y)$. Alors $\int_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right) dx$
$= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right) dy$.

## III / Applications

### 1) Séries de Fourier

**Définition 35** : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et $2\pi$-périodique. On appelle coefficients de Fourier de $f$ les coefficients :
$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ et $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

**Définition 36** : Soit $f \in \mathcal{C}_{m_x - 2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On appelle série de Fourier la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{i\omega n x}$ ou $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x))$

**Théorème 37** : Soit $f \in \mathcal{C}^1_{m_x - 2\pi}([0, 2\pi])$. On suppose de plus que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de $f$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $f$.

**Exemple 38** : En considérant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi$ périodique, égale à $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

**Application 39** : Intégrale de Fresnel.

### 2) La fonction $\Gamma$.

**Définition 40** : La fonction gamma, notée $\Gamma$ est définie par
$$\Gamma : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$$

**Exemple 41** : $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(n+1) = n!$

**Théorème 42** : Prolongement de la fonction $\Gamma$.

- Suites et Séries El Amrani.
- Candelpergher.
- Briane et Pagès
- Gourdon.