228

Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

I/ Continuité :

1) Généralités :

Définition 1 : On dit que f est continue sur I lorsque : $\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Contre-exemple 2 : La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est discontinue en 0.

Proposition 3 : Une fonction f est continue sur I si et seulement si $\forall x \in I, \forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x on a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$

Exemple 4 : La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 5 : Soit f réelle, continue sur l'intervalle I et g continue sur l'intervalle J, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est continue sur I.

Proposition 6 : Soit f une fonction continue sur I contenant A un compact. Alors, $f(A)$ est compact.

Corollaire 7 : Sous les même hypothèses, f est bornée et atteint ses bornes sur A.

2) Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 8 : Soit f une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire 9 : Si f est continue sur $[a,b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés, alors f s'annule au moins une fois sur $]a,b[$

Remarque 10 : On peut trouver l'un de ces points par dichotomie.

Proposition 11 : Sous les hypothèses du corollaire 9, si f est strictement monotone, il y a unicité du point où f s'annule

Exemple 12 : L'équation $e^x = 2\cos^2(\frac{x}{2})$ admet une unique solution dans $]0, \frac{\pi}{4}[$.

Corollaire 13 : Tout polynôme réel de degrés impair a au moins une racine réelle.

3) Uniforme continuité

Définition 14 : On dit que f est uniformément continue sur I lorsque : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\ \ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Contre-exemple 15 : $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$

Remarque 16 : L'uniforme continuité implique la continuité.

Théorème 17 : (Heine) Toute fonction continue sur $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$.

Application 18 : Si f est continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$, alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Lemme 19 : On a $\sum_{k=0}^{n} (k-nx)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$

Théorème 20 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Il existe une suite de polynôme qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Application 21 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0$. alors $f = 0$.

D1

Définition 22 : Soit $k > 0$, f est dite k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ si $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$

Exemple 23 : $x \mapsto ax+b$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto \cos(\omega x)$, $\omega > 0$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Contre-exemple 24 : $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 25 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne, elle est uniformément continue.

4) Préservation de la continuité :

Proposition 26 : Soit (f_n) une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ continues convergente uniformément vers $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est continue sur I.

Contre-exemple 27 : $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-nx}$ converge simplement vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 28 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$,
Si :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur I
- $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors $x \mapsto \sum f_n(x)$ est continue sur I

Exemple 29 : $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 30 : J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$
On pose $F(t) = \int_J f(t,x)\,dx$. Si :
- $\forall t \in I$ $x \mapsto f(t,x)$ mesurable
- pp $x \in J$ $t \mapsto f(t,x)$ continue
- $\exists \varphi \in L^1$ positive $|f(t,x)| \leq \varphi(x)$ $\forall t \in K$ compact de I et pp x

Alors F est continue sur I.

II / Dérivabilité :

1) Généralités

Définition 31 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est finie. On note cette limite $f'(a)$, appelé dérivé de f en a.

Proposition 32 : Soit $a \in I$. L'application f est dérivable en a si et seulement si $f(a+h) = f(a) + h a_0 + h\varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$
Où le réel a_0 est le nombre dérivé de f en a.

Exemple 33 : $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Proposition 34 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

Remarque 35 : La réciproque est fausse car $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable 0.

Proposition 36 : Soit f, g définies sur I à valeurs réelles, dérivables sur I. Alors :
i) $\lambda f + \mu g$ est dérivable $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$
ii) fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$
iii) Si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
iv) $(f \circ g)$ est dérivable et $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$.

Définition 37 : Soit $k > 0$, On dit que f est $\mathcal{C}^k$ sur I si f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I.

2) Théorèmes généraux et formule de Taylor.

Proposition 38 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si on a :
i) f admet un extremum local au point a
ii) a est un point intérieur à I.
iii) f est dérivable en a.
Alors $f'(a) = 0$.

Théorème 39 : (Rolle) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ avec $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$

Théorème 40 : (Accroissements finis) : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. dérivée bornée

Corollaire 41 : La fonction f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.

Théorème 42 : (Taylor - Lagrange) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a;b[$, alors $\exists c \in]a,b[$, $f(b) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

Taylor-Young → + approximation de π. D_2

3) Préservation de la dérivabilité

Proposition 43 : Soit (f_n) une suite de fonction $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que : i) $\exists x_0 \in [a,b]$, $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
ii) $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers g.
Alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Proposition 44 : Soit (f_n) une suite de fonction, $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose
i) $\exists a \in I$, $\sum f_n(a)$ converge ii) $\sum f_n'$ converge uniformément sur I
Alors $\sum f_n$ converge simplement sur I, uniformément sur tout segment inclus dans I.
De plus, sa somme S est dérivable sur I et $S' = \sum f_n'$

Exemple 45 : La fonction $\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est dérivable.

Proposition 46 : Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$.
On suppose : i) $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I
ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifie les hypothèses de 30
Alors la fonction $\phi : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur A et
$\phi'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Exemple 47 : La fonction $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

+ Thm fonda Analyse.

Dantzer
Gourdon
Suites et Séries El Amrani
Analyse Capes/Agreg interne AULIAC / CABY.