

I/ Généralités :1) Suite récurrente d'ordre 1 :

Définition 1 : Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite récurrente d'ordre 1 si: $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$ où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 1 : La suite définie par $U_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \frac{1}{U_n}$ est une suite récurrente d'ordre 1.

Proposition 3 : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente d'ordre 1 telle que $U_{n+1} = f(U_n)$ où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l et f continue en l . Alors l est un point fixe de f .

Exemple 4 : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n^2 - U_n - 3$. Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors $l \in \{-1, -2, 3\}$.

Proposition 5 : Soit $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $U_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$.

* Si f est croissante, alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et bornée de monotonie est donné par le signe de $U_1 - U_0$.

* Si f est décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante. Alors les suites $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de monotonie opposée.

Exemple 5 : Soit $U_0 \in]0, 1[$, $U_0 \in]0, 1[$ et $U_{n+1} = 1 - U_n^2$. Les suites $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.

* Suite arithmétique : On appelle suite arithmétique les suites récurrentes de la forme $U_{n+1} = U_n + a$ où $a \in \mathbb{R}$ et on a $U_n = U_0 + na$.

* Suite géométrique : On appelle suite géométrique les suites récurrentes de la forme $U_{n+1} = q U_n$ où $q \in \mathbb{R}$ et on a $U_n = q^n U_0$. Convergente si et seulement si $|q| \leq 1$.

Application 7 : 1) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $U_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2 + \sqrt{U_n}}$ converge vers 1 pour tout $U_0 \in]0, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} [$, et stationnaire pour $U_0 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ et pas définie sinon.

Application 8 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ définie par $f(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{2xy}{x+y})$ et $X_{n+1} = f(X_n)$ où $X_n = (x_n, y_n)$. On a alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente dans $(\mathbb{R}_+^2)^2$.

2) Suite récurrente d'ordre k :

Définition 3 : Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite récurrente d'ordre k si on peut écrire: $\forall n \geq k, U_n = f(U_{n-1}, \dots, U_{n-k})$ où $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 10 : La proposition 5 reste vraie dans le cas $\mathbb{R}^d$.

Définition 11 : On appelle suite de Fibonacci la suite récurrente d'ordre 2 définie par: $U_0 = 0, U_1 = 1$ et $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

Proposition 12 : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente d'ordre 2 vérifiant $U_n = a U_{n-1} + b U_{n-2}$ pour $n \geq 2$ avec $(U_0, U_1) \in \mathbb{R}^2$.

On note r_1 et r_2 les racines de $r^2 - ar - b = 0$ (équation caractéristique).
* Si $r_1 \neq r_2$ alors $U_n = \frac{(U_0 - U_1 r_2) r_1^n + (U_1 - U_0 r_1) r_2^n}{r_1 - r_2}$.

* Si $r_1 = r_2$ alors $U_n = (\frac{a}{2})^n (U_0 + n(\frac{2}{a} U_1 - U_0))$.

2) Si le polynôme $f''(x) > 0 \forall x \in [c, d]$, alors le résultat de 1 est valable avec $I = [c, d]$ et la suite (x_n) est strictement décroissante et on a $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$

Application 24: Soit $g > 0$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. L'application de la méthode de Newton sur $\text{ker } [0, d]$ avec $d > g$. On obtient une approximation de $\sqrt{g}$.

Exemple 25: Pour $g = 2$, on obtient $x_2 = 1,41$ très proche de $\sqrt{2}$ pour $x_0 = 2$

III Méthodes itératives.

Lemme 26: Pour tout $m \geq 2$, on note U_m l'aire d'un polygone régulier à 2^m côtés inscrit dans le cercle de centre O de coordonnées $(0, 0)$ et de rayon 1 dans le repère usuel.

1) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une convergence d'ordre 1 vers π .

$$2) \forall n \geq 2, U_{n+1} = \frac{\sqrt{2} U_n}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{U_n^2}{2^{2(n-1)}}}}}$$

Remarque 27: Pour U_6 , on trouve 3,1403 grâce à un algorithme.

On considère $A \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$

Définition 28: On appelle fonctionnelle quadratique son $\mathbb{R}^m$ toute fonction $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{1}{2} Ax, x > - < b, x >$

Proposition 29: $\forall x \in \mathbb{R}^m, \nabla \varphi(x) = Ax - b$

Lemme 30: (Karush-Kuhn) $\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, on a

$$\lambda_{\max} = \max_{x \in \mathcal{S}_p(A)} \lambda \text{ et } \lambda_{\min} = \min_{x \in \mathcal{S}_p(A)} \lambda$$

$$\text{On a } \left(\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{2} \right)^2 \leq \frac{\|x\|^4}{\|x\|^2} \leq \frac{\|x\|^2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

Théorème 31: (Gradient à pas optimal)

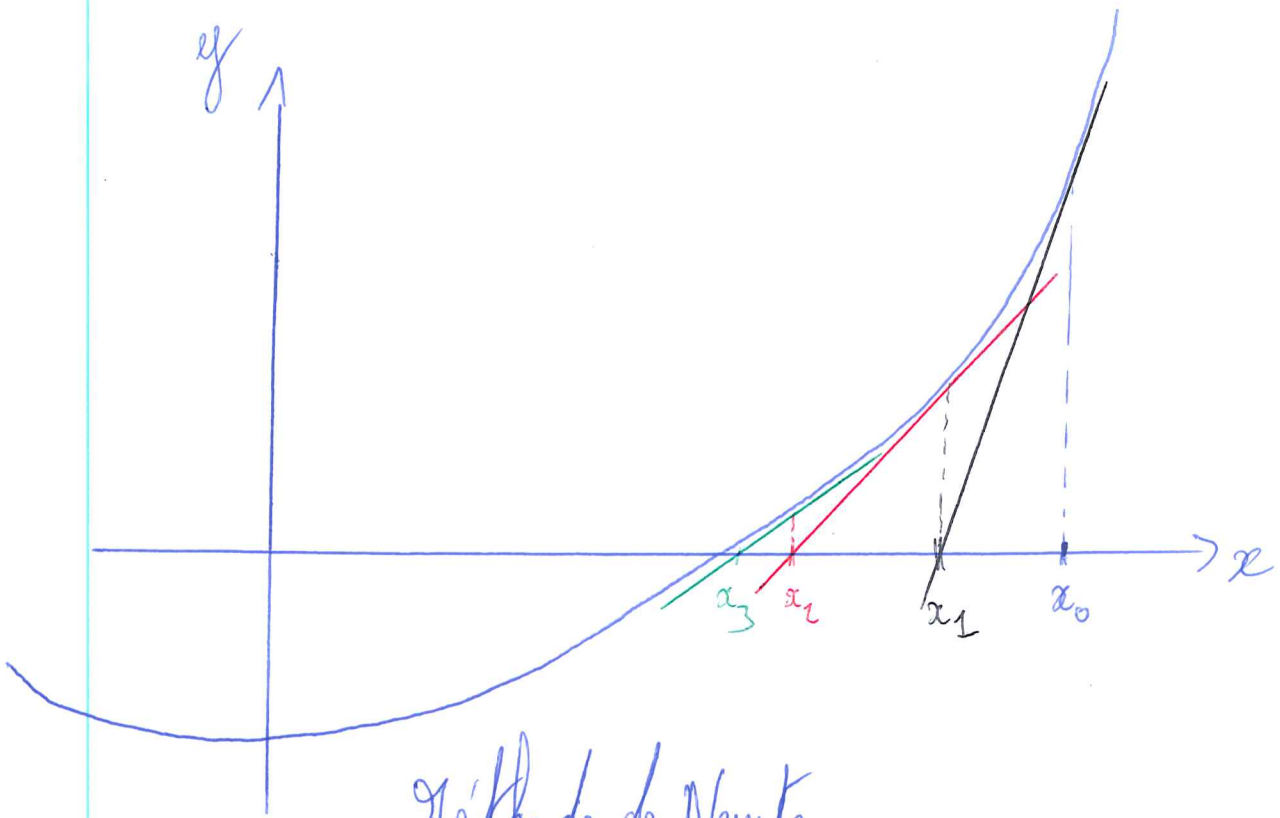
1) L'application φ atteint son minimum en $\bar{x}$ (solution de $Ax = b$) et seulement en ce point.

2) Soit $a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}^m$ définie par

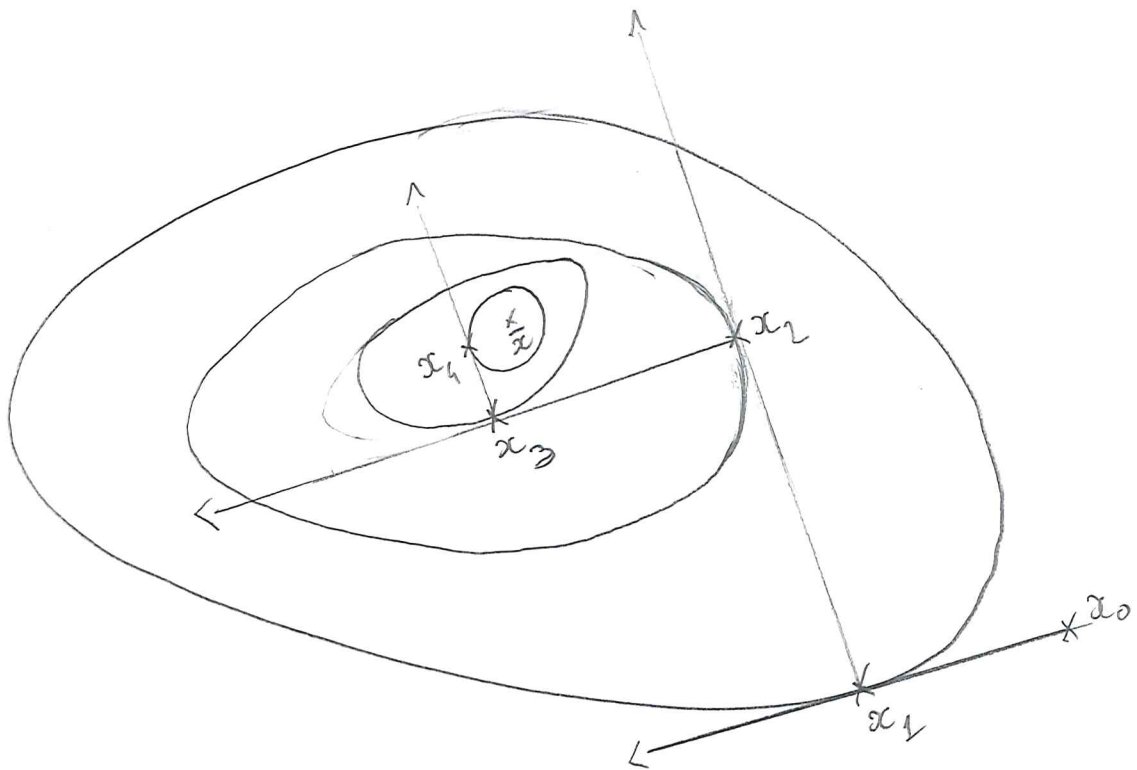
$$\begin{cases} x_0 = a \\ \alpha_k = \frac{\|\nabla \phi(x_k)\|^2}{\|\nabla \phi(x_k)\|_A^2} \text{ si } x_k \neq \bar{x}, 0 \text{ sinon} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla \phi(x_k) \end{cases}$$

La suite (x_k) converge vers $\bar{x}$ et $\forall k \geq 0$ on a

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \left(\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \right)^{k+1} \|x_0 - \bar{x}\|$$



Méthode de Newton.



Méthode du gradient à pas optimal