219 — Extremums, existence, caractérisation, recherches. Exemples et applications

I/ Conditions globales d'existence :

1) Existence et compacité :

Théorème 1 : Soit (E,d) un espace métrique compact, soit (F,δ) un espace métrique et soit $f : E \to F$ continue. Alors $f(E)$ est compact.

Corollaire 2 : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue avec E métrique compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Exemple 3 : * $f(x) = x^2$, $I = [0,1] \cup [2,3]$, $f(I) = [0,1] \cup [4,9]$

* A compact non vide de E métrique. Alors $\exists x \in A$, $d(y,A) = d(y,x)$

Contre-exemple 4 : * $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(]0,1]) = [1,+\infty[$

* $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $g([-1,1]) = [0,+\infty[$.

2) Fonctions convexes, unicité :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

Définition 5 : Soit C un convexe de E, soit $f : C \to \mathbb{R}$, on dit que f est une application convexe sur C si :

$$\forall (x,y) \in C^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Exemple 6 : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \|x\|^2$ sont des fonctions strictement convexes sur $\mathbb{R}$.

Proposition 7 : Soit C convexe non vide de E, $f : C \to \mathbb{R}$ une application strictement convexe. Alors il existe au plus un point $\bar{x} \in C$ minimisant f sur C

Remarque 8 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto e^x$ est strictement convexe mais n'atteint pas son minimum.

Proposition 9 : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue et strictement convexe. Si f est coercive, alors f est minorée sur E et atteint son unique min.

Exemple 10 : Soient $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, b un vecteur de E et u un endomorphisme symétrique défini positif. Alors $f : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\langle u(x), x \rangle + \langle b, x \rangle$ admet un unique minimum sur E.

3) Projection sur un convexe fermé.

Définition 11 : Un espace H est un espace de Hilbert si, c'est un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire, complet.

Exemple 12 : $L^2(\mathbb{R})$ et $\ell^2(\mathbb{N})$ sont des espaces de Hilbert.

Théorème 13 : Soit $C \subset H$ un convexe fermé d'un Hilbert H. Soit $x \in H$. $\exists ! y \in C$, $\|x-y\| = d(x,C) = \inf_{z \in C} \|x-z\|$. L'élément y s'appelle la projection orthogonale de x sur C, on le note x_C.

Si $x \in H$, x_C est caractérisé par : $\forall z \in C$, $\langle z - x_C, x - x_C \rangle \leq 0$.

Remarque 14 : On minimise la distance d'un point $x \in H$ à C.

Théorème 15 : Riesz : On note H^* le dual de H un Hilbert. $\forall a \in H$, on note $\varphi_a \in H^*$, $\varphi_a(x) = \langle a, x \rangle$. L'application $H \to H^*$, $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme.

II/ Calcul différentiel dans la Recherche d'extremums.

1) Conditions du premier ordre.

Définition 16 : Un extremum est soit un maximum, soit un minimum

Exemple 17 : $(x,y) \mapsto \sqrt{x} + |y| - 6$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ admet en $(0,0)$ son unique minimum global.

Exemple 18 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin^2(x-y)$, f admet un minimum en $(x, x+n\pi)$ et un maximum en $(x, x+\frac{\pi}{2}+n\pi)$. Les extremums sont globaux mais pas uniques.

Théorème 19 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$, soit $a \in U$. Si f admet un extremum en a, et si f est différentiable en a, Alors $\nabla_a f = 0$.

Exemple 20 : $f(x,y) = x^2 + y^2$ admet un minimum en $(0,0)$ et $\nabla_{(0,0)} f = 0$.

Contre-Exemple 21 : $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ or $f(0)$ n'est pas un minimum.

Proposition 22 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$, convexe. Alors $\nabla_a f = 0 \Leftrightarrow a$ est un minimum.

2) Condition du 2nd ordre.

Théorème 23 : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$

- Si f admet en a un minimum local et si $d_a^2 f$ existe, alors $d_a f = 0$ et $d_a^2 f$ est positive.
- Si $d_a f = 0$ et si $d_a^2 f$ est définie positive, alors f admet un minimum local strict en a.

Contre exemple 24 : $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ admet un maximum en $x = 1$ mais $f'(1) \neq 0$.

Exemple 25 : $f : U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x(\ln(x)^2 + y^2)$ où $U = \{(x,y) \mid x > 0\}$ admet un maximum local en $(1,0)$.

3) Extréma liés :

Théorème 26 : Soient $f, g_1, \dots, g_k : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne $\Pi = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$

Si :
- $f_{|\Pi}$ admet extremum local en $m \in \Pi$
- $(D_x g_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une famille libre pour $x \in U$.

Alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, $D_m f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i D_m g_i$

Lemme 27 : Soient $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est libre et si $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ Alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^k$, $\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i$

Application 28 : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ Alors $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

Application 29 : Théorème Spectral. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

III / Recherche, Point de vue algorithmique.

1) La méthode de Newton.

Théorème 30 : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ $\forall x \in [c,d]$

On considère la suite $x_0 \in [c,d]$

$$x_{n+1} = F(x_n) \text{ où } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

1) Il existe $\alpha > 0$, $\forall x_0 \in I = [a-\alpha, a+\alpha]$ (a zéro de f) tel que (x_n) converge de manière quadratique vers a.

2) Si, de plus, $f''(x) > 0$ $\forall x \in [c,d]$. Alors $\forall x_0 \in]c,d[$ (x_n) est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$

Application 31. On peut appliquer cet algorithme à la dérivée d'une fonction pour trouver un extremum de la fonction.

D1

D2

2) Gradient à pas optimal

Définition 32 : On définit la fonction ϕ comme suit :

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}\|x\|_A^2 - {}^t x b \quad \text{où } A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\langle x, y\rangle_A = {}^t x A y.$$

Théorème 33 : On note $\bar{x}$ l'unique minimum de ϕ.
Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq \bar{x}$ et soit $(x_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \alpha_k = \dfrac{\|\nabla\phi(x_k)\|^2}{\|\nabla\phi(x_k)\|_A^2} \text{ si } x_k \neq \bar{x},\ 0 \text{ sinon} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\phi(x_k) \end{cases}$$

La suite $(x_n)_n$ converge vers $\bar{x}$. De plus, pour tout $k \geq 0$, $\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \sqrt{\dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}\left(\dfrac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}\right)^{k+1} \|x_0 - x\|$

Lemme 34 : Kantorovitch.

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_{A^{-1}}^2 \|x\|_A^2} \geq 4\frac{\lambda_{max}\lambda_{min}}{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2}$$