215

Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et Applications.

Soit n et p deux entiers non nuls. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ d'une norme quelconque et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V ouvert de $\mathbb{R}^p$

I/ Applications différentiables et dérivées partielles

1) Fonctions différentiables

Définition 1 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application. On dit que f est différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que : $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$

Proposition 2 : Avec les mêmes notations lorsque l'application L existe, elle est unique et est appelée la différentielle de f en a, notée $d_a f$.

Remarque 3 : La différentiabilité généralise la dérivabilité en effet, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a, alors f est différentiable en a et $d_a f(h) = f'(a)h$.

Exemple 4 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2^2$ alors $d_x f(h) = 2\langle x, h \rangle$

Proposition 5 : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire. Alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $d_x f = f \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Proposition 6 : Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est bilinéaire. Alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, on a :
$d_{(x,y)} f(h,k) = f(x,k) + f(h,y)$

Exemple 7 : $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A,B) \mapsto AB$ est différentiable et $d_{(A,B)} f(H,K) = AK + HB \quad \forall (H,K) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

2) Opérations algébriques

Proposition 8 : Soient $f, g : U \to \mathbb{R}^p$ différentiables sur U et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha f + g$ est différentiable et $d_a(\alpha f + g) = \alpha d_a f + d_a g$

Proposition 9 : Toute application $U \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$ est continue en a.

Remarque 10 : La réciproque est fausse, $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais pas différentiable en 0.

Théorème 11 : Soit $f : U \to V$ différentiable en a et $g : V \to \mathbb{R}^q$ différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$.

Exemple 12 : $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \sqrt{u}$ sont différentiables et $d_x(h \circ f)(h) = \dfrac{\langle x, h \rangle}{\|x\|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

3) Dérivées partielles

Définition 13 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que f admet une dérivée en a suivant le vecteur v si : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0, cette dérivée est notée $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$

Définition 14 : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$. Si f admet une dérivée en a suivant e_i, alors on dit que f admet une i-ème dérivée partielle en a, notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

Exemple 15 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 y - 2\sin(xy)$ admet des dérivées partielles et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - 2y\cos(xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2x\cos(xy)$.

Proposition 16 : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable en a. Alors les n dérivées partielles de f en a existent et $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $h = \sum_{k=1}^n h_k e_k$ on a $d_a f(h) = \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

TAF. →

Exemple 17 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (xe^{xy}, x^2+y^5)$ est différentiable en $(2,1)$ et $d_{(2,1)} f(h_1,h_2) = (3e^2 h_1 + 4e^2 h_2,\ 4h_1 + 5h_2)$ $\forall (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 18 : La réciproque est fausse : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{2*}}(x,y)$ admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Définition 19 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1', \dots, e_p')$ une base de $\mathbb{R}^p$, $f = \sum_{i=1}^{p} f_i e_i'$. On appelle matrice jacobienne de f en a, la matrice de $d_a f$ relativement aux bases, notée $\mathrm{Jac}_a f = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le p}}$. Lorsque $p = 1$, son gradient au point a est le vecteur $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbb{R}^n$.

II/ Différentiabilité supérieure

1) Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 20 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, si f est différentiable sur U et si sa différentielle $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est continue sur U.

Proposition 21 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si, les dérivées partielles de f existent et sont continues sur U.

Proposition 22 : Soit $f, g : U \to \mathbb{R}^p$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\alpha f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

ii) Si $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{R}^q$ et f $\mathcal{C}^1$ sur U et g $\mathcal{C}^1$ sur V. Alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}^1$ sur U.

Définition 23 : On dit que $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme si f est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et de réciproque de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple 24 : Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est linéaire bijective, alors φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Remarque 25 : La fonction $x \mapsto x^3$ n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

2) La différentielle seconde.

Définition 26 : $f : U \to \mathbb{R}^p$ est dite 2 fois différentiable en a si f est différentiable sur un voisinage de a et si df est différentiable en a.

Proposition 27 : Il existe un isomorphisme entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q))$ et $\mathrm{Bil}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$

Définition 28 : La différentielle seconde de $f : U \to \mathbb{R}^p$ est l'application
$d^2 f : U \to \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $x \mapsto d_x^2 f$ définie $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $d_x^2 f(h,k) = d(d_x f(h))(k)$

Exemple 29 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ est 2 fois différentiable en un point si et seulement si f est 2 fois dérivable et on a : $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$, $d_a^2 f(h,k) = hk f''(a)$

Théorème 30 : Si $f : U \to \mathbb{R}^p$ est 2 fois différentiable en $a \in U$. Alors $d_a^2 f : U \to \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est bilinéaire symétrique.

Proposition 31 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable sur U et 2 fois différentiable en $a \in U$. Alors toutes les dérivées partielles seconde de f sont définies en a et $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ $d_a^2 f(h,k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j$

Théorème 32 : (Schwarz) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable sur U et 2 fois différentiable en $a \in U$. Alors on a : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

III / Fonctions implicites et inversion locale.

1) Théorème des fonctions implicites.

Théorème 33 : (Fonctions implicites) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Si, $\exists (x_0, y_0) \in \Omega$, tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $d_y f(x_0, y_0)$ soit inversible. Alors, il existe U un voisinnage ouvert de x_0 et V de y_0 et $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $((x,y) \in U \times V$ et $f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in U$ et $y = \varphi(x))$

Corollaire 34 : Dans ce cas : $\forall x \in U$, $d_x \varphi = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$

Définition 35 : On appelle φ la fonction implicite définie par f au voisinnage de (x_0, y_0). En particulier, $\varphi(x_0) = y_0$

Théorème 36 : Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et $(a_1, \dots, a_n, b) \in \Omega$ tel que $f(a_1, \dots, a_n, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0$. Alors il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et V de $\mathbb{R}$ et $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que : i) $(a_1, \dots, a_n, b) \in U \times V \subset \Omega$.

ii) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in U$ et $y \in V$, $f(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \Rightarrow y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$

iii) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in U$, $f(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = 0$.

iv) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \dots, x_n, y) \neq 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$ où $x = (x_1, \dots, x_n)$

Exemple 37 : L'équation $f(x,y,z) = 0$ est l'équation implicite d'une surface de $\mathbb{R}^3$ et elle peut s'écrire $z = \varphi(x,y)$

2) Inversion locale et extréma liés

Théorème 38 (Inversion locale) Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ et si $\exists x_0 \in U$ tel que $d_{x_0} f$ un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Alors, il existe un voisinnage U' de x_0 et V' de $y_0 = f(x_0)$ tel que $f : U' \to V'$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Remarque 39 : Il suffit de verifier $\mathrm{Jac}_x f \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 40 : L'application $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme
$\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus [\mathbb{R}_-^* \times \{0\}]$
$(x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$ ← Brower) D_1

Lemme 41 : Soient $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est libre et $\bigcap_{k=1} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, $\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i$.

Théorème 42 : (Extréma Liés) Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f, g_1, \dots, g_k \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$
On pose $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$. On suppose que :
- f admet un extremum local en $m \in \Gamma$.
- La famille $(D_x g_i)_{1 \leq i \leq k}$ est libre pour $x \in U$.

Alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, $D_m f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i D_m g_i$

D_2

Application 43 : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

- El Amrani - Calcul Diff.
- Avez.