214

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie

I/ Le théorème d'inversion locale

1/ Rappels sur les difféomorphismes

Définition 1 : Soient U et V deux ouverts de E et F des espaces vectoriels normés. On dit que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme ($k \geq 1$) si f est bijective, de classe $\mathcal{C}^k$ et si f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple 2 : L'application $x \mapsto x^2$ réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 3 : Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts. Soit $f : U \to V$ un homéomorphisme différentiable en $a \in U$. Si la différentielle df_a est inversible, alors f^{-1} est différentiable en a et $(df_a)^{-1} = df^{-1}_{f(a)}$

Remarque 4 : df_a réalise un isomorphisme entre E et F, qui sont donc de même dimension.

Remarque 5 : Un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme est un homéomorphisme mais la réciproque est fausse : La fonction $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme mais pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

2) Le théorème d'inversion locale.

Théorème 6 : (Inversion locale) Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que df_a soit un isomorphisme de E dans F. Alors, il existe un voisinnage ouvert $V \subset U$ de a et un voisinnage ouvert $W \subset F$ de $f(a)$ tel que $f_{|V}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W

Remarque 7 : Lorsque E et F sont de dimension finie, il suffit de vérifier la condition $\det(df_a) \neq 0$

Remarque 8 : On possède le même théorème en version $\mathcal{C}^k$

Exemple 9 : L'application
$$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$
induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme
$$\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus [\mathbb{R}_-^* \times \{0\}], \quad (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Théorème 10 : (Inversion globale) Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une fonction injective de classe $\mathcal{C}^1$. Alors il y a équivalence entre :

i) $\forall x \in U$, df_x est inversible et bicontinue.

ii) $V = f(U)$ est un ouvert de F et $f^{-1} : V \to U$ est $\mathcal{C}^1$.

3) Applications

Définition 11 : Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle changement de coordonnées sur V, la donnée de n fonctions $f_1, \dots, f_n : V \to \mathbb{R}$ telles que $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) = (u_1, \dots, u_n)$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 12 : Les relations $u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ définissent un changement linéaire de coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ si $(a_{i,j})$ est une matrice inversible.

Exemple 13: L'application $(x,y) \mapsto (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(\frac{y}{x}))$ donne le passage en coordonnées polaire $=(r,\theta)$ sur le demi-plan ouvert $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x>0\}$

Théorème 14: (Changement de coordonnées) Soient $f_1,\dots,f_n$ des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $a\in\mathbb{R}^n$. Les relations $u_i = f_i(x_1,\dots,x_n)$ où $i\in\{1,\dots,n\}$ définissent un changement de coordonnées sur un voisinnage de a si et seulement si $\mathrm{Det}(\mathrm{Jac}_a f)\neq 0$ i.e, les formes linéaires $df_{1_a}\dots df_{n_a}$ sont indépendantes.

Remarque 15: Ce théorème est une reformulation du théorème d'inversion locale.

Corollaire 16: Soient $f_1,\dots,f_p$ des fonctions numérique $\mathcal{C}^1$ au voisinnage de $a\in\mathbb{R}^n$. On peut les compléter par des fonctions $f_{p+1},\dots,f_n$ en un changement de coordonnées au voisinnage de a sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les différentielles $df_{1_a},\dots,df_{n_a}$ sont des formes linéaires indépendentes sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 17: Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est assez proche de I_d, alors A est une racine k-ième : $\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^k=A$.

Proposition 18: La différentielle de l'exponentielle matricielle est : $d\exp_M(H) = \exp(M)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(MH-HM)^k}{(k+1)!}$

II/ Le théorème des fonctions implicites

1) Le théorème.

Théorème 19: (Fonctions implicites) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$, $(a,b)\in U$ et $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$ une application $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^p$. On suppose que $f(a,b)=0$ et que la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ est inversible. Alors, il existe V_a voisinnage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, V_b voisinage ouvert de b avec $V_a\times V_b\subset U$, et $\varphi: V_a\to V_b$ de classe $\mathcal{C}^1$ unique telle que :

$$\forall (x,y)\in V_a\times V_b \quad f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x).$$

Exemple 20: Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x^2+y^2-1$

Si $y>0$, si $(a,b)=(0,1)$ on a $f(x,y)=0 \Leftrightarrow \varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\forall x\in]-1,1[$

Proposition 21: $\forall x\in V_a$, on a

$$d\varphi_x = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1}\circ\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))$$

2) Quelques applications

Proposition 22: Soit $P_0\in\mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P_0. Alors il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de U un voisinage de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans un voisinage V de x_0 telle que $\forall P\in U, \forall x\in V, \quad x=\varphi(P) \Leftrightarrow P(x)=0$.

question : retrouver φ

ex calcul chgt var $\int$

Proposition 23 : L'ensemble des polynômes scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

Proposition 24 : Soit $a, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. L'équation

$$a(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ où } u(x,0) = f(x)$$

admet pour solution la fonction u définie par $u(x,y) = \frac{1-x}{1-y}$ sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<1\}$

III / Sous-variétés, espace tangent et extrema liés.

1) Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ et espace tangent

Définition 25 : Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension m en un point $x_0 \in \Gamma$ si il existe un voisinage ouvert U de x_0 et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U)$ vérifiant $\varphi(x_0) = 0$ et $\varphi(U \cap \Gamma) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$

Proposition 26 : Si il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ différentiable sur un ouvert U contenant x_0, à valeurs réelles, telles que $\varphi_1(x_0) = \dots = \varphi_{n-m}(x_0) = 0$ et les formes linéaires $(d\varphi_{i_{x_0}})_{1\leq i\leq n-m}$ soient linéairement indépendantes. Alors $\{x\in U \mid \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-m}(x) = 0\}$ est une sous-variété en x_0 de dimension m.

Exemple 27 : $C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\} \mid x^2+y^2-z^2=0\}$ est une sous-variété de dimension 2.

Définition 28 : Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $a \in V$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit tangent à V en a si $\exists\, \varphi : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable telle que $\varphi(I) \subset V$, $\varphi(0) = a$ et $\varphi'(0) = v$

Théorème 29 : Si Γ est une sous-variété en a de dimension d. Alors ses vecteurs tangents en a forment un espace vectoriel de dimension d, appelé espace tangent en a à Γ.

2) Extrema liés.

Lemme 30 : Soient $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_h)$ est libre et $\bigcap_{i=1}^{h} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_h)\in\mathbb{R}^h$, $\varphi = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \varphi_i$

Théorème 31 : (Extrema Liés). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f, g_1, \dots, g_h \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On pose $\Gamma = \{x\in U \mid g_1(x) = \dots = g_h(x) = 0\}$. On suppose que :
- f admet un extremum local en $m \in \Gamma$
- La famille $(D_x g_i)_{1\leq i\leq h}$ est libre pour $x \in U$

Alors, $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_h)\in\mathbb{R}^h$, $D_m f = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i D_m g_i$.

Application 32 : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ $\quad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Proposition 33 : Soit $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ on a alors :

$$|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

avec égalité si et seulement si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.