213 Espaces de Hilbert. Bases Hilbertiennes. Exemples et applications

I/ Espaces de Hilbert :

1) Espace préhilbertien :

Définition 1 : On appelle espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$, tout $\mathbb{R}$-ev E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$. On note alors $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$

Remarque 2 : Un espace préhilbertien de dimension finie est appelé espace euclidien.

Exemple 3 : 1) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ muni de $\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ est un espace euclidien
2) L'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ est un espace préhilbertien

Proposition 4 : (Cauchy-Schwarz) : $\forall (x,y) \in E^2$, on a :
$|\langle x,y \rangle| \leq \sqrt{\langle x,x \rangle}\sqrt{\langle y,y \rangle}$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires
(Minkowski) : $\forall (x,y) \in E^2$, $\sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} \leq \sqrt{\langle x,x \rangle} + \sqrt{\langle y,y \rangle}$

Corollaire 5 : L'application $E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x,x \rangle}$ est une norme sur E.

Proposition 6 : $\forall (x,y) \in E^2$
i) $\langle x,y \rangle = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
ii) Identité du parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
iii) Identité de polarisation : $4\langle x,y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$

2) Espace de Hilbert :

Définition 7 : On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet.

Remarque 8 : Un espace de Hilbert est en particulier un Banach

Exemple 9 : Tout $\mathbb{R}$-ev de dimension finie est un Hilbert
$\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire $\langle x,y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$.

Définition 10 : On définit l'ensemble $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ par :
$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int_{\mathbb{R}} f^2(x)dx < \infty \}$ et l'ensemble $L^2(\mathbb{R})$ comme étant le quotient de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ par la relation d'équivalence p.p. i.e $L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})/_{p.p}$

Théorème 11 : Muni du produit scalaire $\langle f,g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$, $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert

3) Projection sur un convexe fermé

Soit $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un Hilbert

Théorème 12 : (Projection) Soit C un convexe fermé de H. Alors $\forall x \in H$, il existe un unique élément de C, qui réalise la distance de x à C. Ce point est appelé la projection de x sur C et il est noté $p_C(x)$. On a ainsi, $\forall y \in C$, $\|x - p_C(x)\| \leq \|x-y\|$
L'élément $p_C(x)$ est de plus caractérisé par :
i) $p_C(x) \in C$. ii) $\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C$.

Théorème 13 : Soit F un sev fermé de H. $\forall x \in H$, le projeté $p_F(x)$ de x sur F est l'unique élément $p \in H$ vérifiant : $p \in F$ et $x - p \in F^\perp$
De plus, $p_F : H \to F$ est continue et linéaire et $H = F \oplus F^\perp$.

Remarque 14 : Si $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et F un sev de H de dimension finie. Si $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de F, alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

Exemple 15 : $\inf_{\alpha,\beta \in} \int_0^1 |\sin(x) - \alpha x - \beta|^2 dx =$

Bergman →

II/ Bases Hilbertiennes

1) Généralités :

Définition 16 : Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H si elle est : i) orthonormée ii) totale : $H = \overline{\mathrm{Vect}(e_i, i\in I)}$

Théorème 17 : (Gram-Schmidt) Soient E un $\mathbb{R}$-ev préhilbertien et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre d'éléments de E. Alors il existe une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E tel que : $\forall n\in\mathbb{N}$
$\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n) = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$

Définition 18 : Un espace vectoriel normé E est dit séparable s'il contient une famille dénombrable dense dans E.

Théorème 19 : Soient H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne
ii) $\forall x\in H$, $x = \sum_{n\geq 0} \langle x, e_n\rangle e_n$ i.e $\lim_{N\to+\infty} \| x - \sum_{n=0}^{N} \langle x,e_n\rangle e_n \| = 0$
iii) $\forall x\in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x,e_n\rangle|^2$
iv) $\{e_n \mid n\in\mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$ et $\Delta : H \to \ell^2(\mathbb{N})$, $x \mapsto (\langle x,e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une isométrie bijective.

Exemple 20 : La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $e_n = (0,\dots,0,\underset{n}{1},0,\dots,0\dots)$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

2) Polynôme orthogonaux

Définition 21 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive et telle que $\forall n\in\mathbb{N}$ $\int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty$.

Définition 22 : On note $L^2(I,\rho)$ l'espace Hilbertien des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle_\rho = \int_I f(x)g(x)\rho(x)dx$.

Proposition 23 : Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaire orthogonaux 2 à 2 tels que $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux de $L^2(I,\rho)$ associé à la fonction poids ρ.

Théorème 24 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{-\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$ alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour la norme $\|\cdot\|_\rho$.

Exemple 25 : 1) Si $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$. Les polynomes orthogonaux associés à ρ sont appelés les polynômes de Hermite où
$P_0 = 1$ $P_1 = x$ $P_2 = x^2 - \frac{1}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$
2) Si $I = [-1,1]$ et $\rho(x) = 1$. Les polynomes orthogonaux associés à ρ sont les polynômes de Legendre où $P_0 = 1$ $P_1 = x$ $P_2 = x^2 - \frac{1}{3}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$

Application 26 :

En notant $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les polynômes de Hermites, on a $(H_n e^{-\frac{x^2}{2}})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

D1

III/ Séries de Fourier

Définition 27 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle coefficients de Fourier de f, les nombres définis par : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$

Définition 28 : On appelle série de Fourier associé à f, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ ou $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$

Définition 29 : On définit l'ensemble $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, l'espace de Hilbert $\{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

Théorème 30 : (Fejer) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et 2π-périodique $\forall n \in \mathbb{Z}$, on note $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{ikx}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$ et $C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k$.

Alors $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Application 31 : La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Proposition 32 : Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$.

Proposition 33 : L'application $\mathcal{F} : L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) \to \ell^2$, $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une isométrie bijective et on a $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Thm : Jordan-Dirichlet.

Application : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

* El Amrani
* Objectif Agreg
* Gourdon
* Brezis.