

I / Approximation par des polynômes.

1) Approximation locale:

Théorème 1: (Taylor - Lagrange) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$.

Alors $\exists c \in]a, b[, f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

Proposition 2: (Inégalité de Taylor - Lagrange) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. On suppose que il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in]a, b[, |f^{(n+1)}(t)| \leq M$.

Alors $|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Exemple 3: La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue.

Théorème 4: (Taylor - Young) Soit $m \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^m$ sur I . Soit $a \in I$ tel que $f^{(m+1)}(a)$ existe. Alors, lorsque $h \rightarrow 0$ on a $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(a) + o(h^m)$.

Théorème 5: (Taylor - Reste Intégral) Soit $m \in \mathbb{N}$ et une application $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur $[a, b]$. Alors on a:

$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt$.

Exemple: L'inégalité $\forall x > 0, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^5}{120}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

2) Théorème de Weierstrass:

Définition 6: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle polynôme de Bernstein la fonction polynomiale de degrés $m \in \mathbb{N}$: $B_m(f): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$x \mapsto \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\frac{b-a}{b-a}\right)^k x^k (1-x)^{m-k}$.

Proposition 7: Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = 1$.

Théorème 8: (Weierstrass) Toute fonction continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

Application 9: Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\forall m \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^m f(t) dt = 0$ alors $f = 0$.

Proposition 10: Si f est une fonction lipschitzienne, alors $\|f - B_n(f)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

3) Polynômes orthogonaux:

Définition 11: On appelle fonction poids $p: I \rightarrow \mathbb{R}$, mesurable, strictement positive et telle que: $\forall m \in \mathbb{N}, \int_I |x|^m p(x) dx < \infty$.

Définition 12: On définit l'espace hilbertien $L^2(I, p)$ l'espace des fonctions intégrables pour la mesure de densité p par rapport à la mesure de Lebesgue et on à doter muni du produit scalaire:

$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x) p(x) dx$.

$L^2(I, p) = \left\{ f: I \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_I |f(x)|^2 p(x) dx < \infty \right\}$.

Proposition 13: Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux $\mathcal{L}^2$ tel que $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée à la fonction poids P .

Théorème 14: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et P une fonction poids.

Si existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{-\alpha|x|} P(x) dx < +\infty$ alors la famille des polynômes orthogonaux associée à P forme une base hilbertienne de $\mathcal{L}^2(I, P)$ pour $\|\cdot\|_P$.

Exemple 15: 1) $I = \mathbb{R}$ et $P(x) = e^{-x^2}$. Les polynômes orthogonaux associés à P sont appelés les polynômes de Hermite où $P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = x^2 - \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(x) = \frac{1}{(2^n n!)^{\frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$.

2) $I = [-1, 1]$ et $P(x) = 1$, les polynômes orthogonaux associés à P sont les polynômes de Legendre où $P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(x) = \frac{1}{(2^n n!)^{\frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$.

Application 16: En notant $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les polynômes de Hermite, on a $(H_n e^{-\frac{x^2}{2}})_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Application 17: La famille orthogonale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet de calculer les projections sur le sous-espace $\text{Vect}(P_0, \dots, P_n) = \mathcal{P}_n[X]$. Proposition 18: Soit $\|f\|_P$ la norme associée à la fonction poids P et $\|f\|_2$ la norme $\mathcal{L}^2$. Alors $\|f\|_P \geq \|f\|_2$ et $\|f\|_2 \leq \|f\|_P$ si et seulement si $P(x) \geq 1$ pour tout x .

II/ Approximation des fonctions périodiques

1) Series de Fourier:

On note $E_{2\pi}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 18: Soit $f \in C_{2\pi}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On appelle coefficient de Fourier de f les réels $a_n \in \mathbb{R}, c_n \in \mathbb{C}$ tels que $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$ et $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.

Définition 19: Soit $f \in C_{2\pi}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique: $S(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$.

Proposition 20: Soit $f \in E_{2\pi}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On a: $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n(f)|^2$.

2) Théorèmes de Fejér et Dirichlet:

Définition 21: On appelle moyen de Dirichlet d'ordre N la somme $D_N(t) = \sum_{k=-N}^N e^{-ikt}$ et moyen de Fejér d'ordre N , $K_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k$. et $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$.

Proposition 22:

i) $D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ ii) $\|D_N\|_2 = \sqrt{N+1}$ iii) $\|K_N\|_2 = 1$ iv) $\|K_N\|_1 = 1$ v) $\|K_N\|_1 = 1$ vi) $\|K_N\|_1 = 1$

Théorème 23: i) Soit $f \in C_{2\pi}^0$, continue, 2π -périodique. Alors $\|f - K_N\|_2 \rightarrow 0$ et $\|f - D_N\|_2 \rightarrow 0$.

ii) Soit $f \in C^p$ ($1 \leq p < \infty$) alors $\|f - K_N\|_p \rightarrow 0$ et $\|f - D_N\|_p \rightarrow 0$.

Application 24: La famille $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{L}^2$.

Théorème 25 (Dirichlet) Soit f une fonction 2π -périodique, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ mesurable sur $[0, 2\pi]$. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et la somme est la régularisée de f .

Théorème 26: Soit f une fonction 2π -périodique, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ mesurable sur $[0, 2\pi]$. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Application 27: $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

III / Interpolation polynomiale

Définition 28: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_0, \dots, x_m$ dans $[a, b]$ à 2 distincts. On appelle polynôme d'interpolation de Lagrange en les $(x_i)_{0 \leq i \leq m}$ le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^m f(x_k) l_k(x) \text{ où } l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^m \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Théorème 29: Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_m[X]$ vérifiant $P(x_i) = f(x_i) \forall i \in [0, m]$, ce polynôme est le polynôme P_n .

Exemple 30: Pour $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 = 0$
 $x \mapsto \sin(x)$ $x_1 = \frac{\pi}{2}$
 $x_2 = \pi$.

On a $P_2(x) = -\frac{4}{\pi^2} (x^2 - \pi x)$

Lemme 31: Soit g une fonction p -fois dérivable sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $p+1$ points $c_0 < c_1 < \dots < c_p$ de $[a, b]$ tel que

$$g(c_i) = 0 \forall i \in [0, p]. \text{ Alors } \exists \xi \in]c_0, c_p[\text{ tel que } g^{(p+1)}(\xi) = 0.$$

Théorème 32: On suppose f est $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$.

Alors $\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in]\min(x, a), \max(x, b)[$ tel que $f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+2)!} \pi_{n+2}(x) f^{(n+2)}(\xi_x)$ où $\pi_{n+2}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$

Corollaire 33: $\|f - P_n\|_{(n+2)!} \leq \frac{1}{(n+2)!} \|\pi_{n+2}\| \|f^{(n+2)}\|$

- Caution
- Choix des x_j
- Suites et séries
- Tully - Quotient
- Dérivées