208 — Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

I/ Généralités

1) Espaces vectoriels normés :

Définition 1 : Une norme sur E est une application $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \|x\| \end{array}$ telle que : i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ iii) $\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 2 : Muni d'une norme, E est appelé un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé noté $(E, \|.\|)$

Exemple 3 : Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ on a les normes :

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ et $\|x\|_\infty = \sup_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$

Exemple 4 : L'ensemble $B(X, \mathbb{R})$ des applications bornées d'un ensemble X dans un espace vectoriel normé (e.v.n) $\mathbb{R}$ est un e.v.n muni de la norme infinie $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$

On munit E d'une norme.

Définition 5 : Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes si $\exists a > 0, \exists b > 0, \forall x \in E, \ aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_2(x)$

Contre-exemple 6 : Soit $E = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}))$. Les applications $\|.\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$ et $\|.\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ sont des normes sur E qui ne sont pas équivalentes.

Proposition 7 : Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. L'application $d : \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \|x-y\| \end{array}$ est une distance sur E.

Proposition 8 : L'application $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \|x\| \end{array}$ est continue.

Proposition 9 : Si V est un s.e.v de l'e.v.n E, alors son adhérence $\overline{V}$ est un s.e.v de E. En particulier, un hyperplan de E est soit fermé, soit dense dans E.

2) Applications linéaires continues.

Dans cette partie, E et F désignent 2 $\mathbb{K}$-evn.

Théorème 10 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est continue sur E

ii) f est continue en 0

iii) f est bornée sur la boule unité fermée $B_f(0,1)$ de E.

iv) f est bornée sur la sphère unité $S(0,1)$ de E.

v) $\exists M > 0, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E \ \forall x \in E$

vi) f est lipschitzienne

vii) f est uniformément continue sur E.

Définition 11 : L'ensemble des applications linéaire continue de E dans F est noté $\mathcal{L}_c(E,F)$. On norme $\mathcal{L}_c(E,F)$ en posant :

$\forall f \in \mathcal{L}_c(E,F) \quad |||f||| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$

Exemple 12 : i) L'application $\begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{array}$ est linéaire mais pas continue

ii) Soit $f \in L^1(]0,1[)$ l'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire continue

Proposition 13 : Soient E, F et G trois e.v.n, soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $|||g \circ f||| \leq |||g||| . |||f|||$

Proposition 14 : Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$. f est continue si et seulement si son noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est un fermé de E.

II/ Espaces vectoriels normés remarquables

1) Cas des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Théorème 15: Dans un e.v.n de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 16: Toute application linéaire d'un e.v.n de dimension finie dans un e.v.n quelconque est continue.

Corollaire 17: Tout e.v.n de dimension finie est complet

Corollaire 18: Tout s.e.v de dimension finie d'un e.v.n est fermé.

Corollaire 19: Les parties compactes d'un e.v.n de dimension finie sont les parties fermées bornées.

Exemple 20: La fonction $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$, $A \longmapsto \chi_A$ est continue.

Théorème 21: Soit E un $\mathbb{R}$-evn.
La boule unité fermée de E est compact $\Rightarrow$ E est de dimension finie.

2) Cas des espaces de Banach

Définition 22: Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Exemple 23: $\mathbb{R}^N$ est un espace de Banach.

Théorème 24: Si F est un espace de Banach, l'evn $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.

Exemple 25: Soit X un ensemble. On note $B(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$. $(B(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Définition 26: On appelle espace ℓ^p où $p \in [1,+\infty[$ et ℓ^∞ les espaces $\ell^p = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{m=1}^{\infty} |u_m|^p < \infty\}$
$\ell^\infty = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty\}$

Proposition 27: Soit $1 \leq p < +\infty$, ℓ^p munit de la norme $\|.\|_p : (u_n) \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et ℓ^∞ munit de la norme infinie $\|.\|_\infty : (u_n) \mapsto \sup_{\mathbb{N}} |u_n|$ sont des espaces de Banach.

Définition 28: Soit Ω un ensemble. Pour $p \geq 1$, on définit $L^p(\Omega)$ comme étant l'ensemble des classes d'équivalences modulo l'égalité presque partout des fonctions mesurables f telles que $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$

Remarque 29: Pour le cas $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$, il faut que $\sup_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty$

Théorème 30: (Fisher-Riesz). Les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach.

III/ Les espaces de Hilbert.

1) Théorème de la projection sur un convexe fermé.

Définition 31: Soit H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel munit d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On dit que H est un espace hilbertien, si il est complet pour la norme associée au produit scalaire.

Exemple 32: L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ munit du produit scalaire $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $(u_n, v_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ est un espace hilbertien.

ID1

D2

Théorème 33 : (Projection sur un convexe fermé) Soit $(H,\langle .,.\rangle)$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H. Alors $\forall x \in H$, il existe un unique élément de C qui réalise la distance de x à C. Ce point est appelé la projection de x sur C et est noté $p_C(x)$.
On a ainsi $\forall y \in C$, $\|x - p_C(x)\| \leq \|x-y\|$ et on a :
i) $p_C(x) \in C$ ii) $\langle x - p_C(x) ; y - p_C(x)\rangle \leq 0$ $\forall y \in C$.

Application 34 : L'application $p_C : \begin{array}{l} H \to C \\ x \mapsto p_C(x) \end{array}$ est une application continue.

Théorème 35 : Soit $(H,\langle .,.\rangle)$ un espace de Hilbert et F un sev fermé de H. Pour $x \in H$, le projeté $p_F(x)$ de x sur F est l'unique élément $p \in H$ qui vérifie : $p \in F$ et $x - p \in F^\perp$.
De plus, l'application $p_F : H \to F$ est une application linéaire continue et surjective et on a $H = F \oplus F^\perp$.

Application 36 : Soit $(H,\langle .,.\rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie et $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de F. Alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$.

Exemple 37 : $\inf_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} \left(\int_0^1 |\sin(x) - \alpha x - \beta|^2 dx \right) =$

2) Bases Hilbertiennes

Soit $(H,\langle .,.\rangle)$ un Hilbert.

Définition 38 : On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H si : - elle est orthonormée
- elle est totale : $H = \overline{Vect(e_i, i \in I)}$

Théorème 39 : Si H est séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Les propositions suivantes sont équivalentes :
i) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne
ii) $\forall x \in H$, $\left(x = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle e_k, x\rangle e_k\right)$
iii) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$
iv) $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ et $\Delta : \begin{array}{l} H \to \ell^2(\mathbb{N}) \\ x \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$ est une isométrie bijective.

Exemple 40 : i) La famille $(t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$
ii) L'espace $H(\mathbb{D}) := L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert et $\left(t \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} e^{int}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $H(\mathbb{D})$.
iii) La famille (U_n) où $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = (0,\dots,0,1,0,\dots)$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.