206

Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse

Soit $(E, \|.\|)$ une EVN de dimension finie n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I / Espaces vectoriels normés.

1) Normes et Topologie

<u>Définition 1</u> : Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes si $\exists a>0$ et $b>0$, $\forall x \in E$ $aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$

<u>Théorème 2</u> : Dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

<u>Contre-exemple 3</u> : Dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, les normes $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ où $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.

<u>Corollaire 4</u> : Une partie de $(E, \|.\|)$ est compacte $\Leftrightarrow$ fermée bornée

<u>Corollaire 5</u> : Un EVN fini est complet.

<u>Théorème 6</u> : (Riesz) Soit E un EVN. La boule unité fermée est compact $\Leftrightarrow$ E est de dim finie

<u>Proposition 7</u> : $O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$

2) Applications Linéaires

<u>Proposition 8</u> : Toute application linéaire $f: E \to F$ où E est un EVN fini et F un EVN qcq est continue.

<u>Contre-exemple 9</u> : L'application $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ n'est pas continue pour $\|\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\| = \max |a_i|$

<u>Théorème 10</u> : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à $E/_{\mathrm{Ker}(f)}$.

<u>Théorème 11</u> : Soit F un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f est de rang fini et $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + rg(f)$.

<u>Corollaire 12</u> : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E, F 2 $\mathbb{K}$-ev fini de même dimension. Alors f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective

<u>Contre-exemple 13</u> : $f: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ est linéaire surjective mais pas bijective

<u>Théorème 14</u> : (Représentation de Riesz) Soit $(E, \langle.\rangle)$ un EVN euclidien de dim finie.
Alors l'application $E \to E^*$, $x \mapsto \langle x, . \rangle$ est un isomorphisme.

II / Calcul Différentiel.

1) Généralités

<u>Définition 15</u> : Soient E et F deux $\mathbb{R}$-EVN et U ouvert $\subset E$ et $a \in U$. Une application $f: U \to F$ est dite différentiable en a si il existe $\varphi \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|)$
Si φ existe, φ s'appelle différentielle de f en a, noté $D_a f$

<u>Exemple 16</u> : Soit $f: M_n(\mathbb{R})^2 \to M_n(\mathbb{R})$, $(X,Y) \mapsto XY$ alors $D_{(X_0,Y_0)} f(H,K) = HY_0 + X_0K$

$g: GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $\Pi \mapsto \Pi^{-1}$ alors $D_\Pi f(H) = -\Pi^{-1} H \Pi^{-1}$

Proposition 17 : Soient E et F deux EVN finis, $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, U ouvert $\subset E$, $a \in U$ et $f : U \to F$.
Si f est différentiable en a, alors les n dérivées de f en a existent et $\forall h = \sum h_k e_k$, on a $D_a f(h) = \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

Exemple 18 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (x e^{xy}, x^2+y^5)$

On a alors $D_{(2,1)} f(h_1,h_2) = (3e^2 h_1 + 4e^2 h_2, 4h_1 + 5h_2)$

Définition 19 : Soient E et F deux espaces vectoriels normés finis, $B=(e_1,\dots,e_n)$ base de E et $B'=(e_1',\dots,e_p')$ base de F.
$f = f_1 e_1' + \dots + f_p e_p'$. Si f est différentiable, on appelle matrice jacobienne de f au point a la matrice $\mathrm{Jac}\, f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$

Application 20 : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

2) Théorème d'inversion locale et extremas liés.

Définition 21 : U un ouvert de E et V ouvert de F. On dit que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur V si :
i) f bijective ii) $f \in \mathcal{C}^k$ iii) $f^{-1} \in \mathcal{C}^k$.

Théorème 22 : (Inversion locale) Soit E, F deux EVN fini et U et V ouvert de E et F et $f : U \to F$ application $\mathcal{C}^k$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $D_a f$ soit un isomorphisme de E dans F.
Alors, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de a et un ouvert $W \subset F$ de $f(a)$ tel que $f_{|V}$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféo de V sur W.

Remarque 22 : Il suffit de vérifier $\det(d_a f) \neq 0$

Exemple 23 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$
Alors f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local.

Lemme 24 : Soient $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est libre et $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, $\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i$

Théorème 25 : (Extréma Liés) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit $f, g_1, \dots, g_k \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$
On pose $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$.
On suppose que : - f admet un extremum local en $m \in \Gamma$.
- La famille $(D_x g_i)_{1 \le i \le k}$ est libre pour $x \in U$.
Alors, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, $D_m f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i D_m g_i$.

Application 26 : Tout endomorphisme symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.

III / Applications

1) Théorème de la projection

Théorème 27 : (Projection sur un convexe fermé) Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$ Hilbert et C un convexe fermé de H. Alors, $\forall x \in H$, $\exists ! y \in C$ qui réalise la distance de x à C. Ce point est appelé projection de x sur C noté $p_C(x)$ caractérisé par : i) $p_C(x) \in C$
ii) $\langle x - p_C(x) ; y - p_C(x) \rangle \le 0 \quad \forall y \in C$.

Théorème 28 : Soit $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-Hilbert et F un sev fermé de H. Pour $x \in H$, le projeté de x sur F est l'unique élément $p \in H$ vérifiant $p \in F$ et $x - p \in F^\perp$. De plus, l'application $P_F : H \to F$ est linéaire, continue et $H = F \oplus F^\perp$

Application 29 : Si F est de dimension finie. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F, alors on a

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Exemple 30 : $\inf_{\alpha,\beta} \int_0^1 (t^3 - \alpha t^2 - \beta t - \gamma)^2 \, dt = \dots$

2) Equation différentielles linéaires sur $\mathbb{K}^n$

Définition 31 : On appelle équation linéaire d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ toute équation différentielle de la forme $Y^{(p)} = A_{p-1}(t) Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t) Y + B(t)$ où $A_i : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont continues.

Proposition 32 : Toute équation linéaire d'ordre p peut s'écrire comme une équation linéaire d'ordre 1 sous la forme

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & I_n \\ A_0(t) & \cdots & & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$$

Théorème 33 : (Cauchy-Lipschitz linéaire) Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B : I \to \mathbb{K}^n$ continues. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = A(t) Y + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$

Corollaire 34 : Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continue. L'ensemble S_H des solutions maximales de $Y' = A(t) Y$ est un SEV de dimension n du $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$

Exemple 35 : Bertelin

Gourdon Analyse + Algèbre

Calcul Diff El Amrani.

Avez.

Objectif Agreg