209

Connexité. Exemples et applications.

Soit (E,d) un espace métrique.

I/ Généralités.

1) Définitions

<u>Proposition 1</u>: Les assertions suivantes sont équivalentes:

i) Si $X = O_1 \sqcup O_2$, avec O_1, O_2 ouverts alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$

ii) Si $X = F_1 \sqcup F_2$, avec F_1, F_2 fermés alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$

iii) Si $A \subset X$ avec A ouvert-fermé, alors $A = \emptyset$ ou $A = X$.

<u>Exemple</u>: $\mathbb{R}$ est connexe.

<u>Définition 2</u>: Un espace connexe est un espace vérifiant l'une des assertions précédente.

<u>Proposition 3</u>: La partie A de E est connexe si et seulement si l'une des 2 conditions suivantes est vérifiée:

i) Si $A \subset O_1 \cup O_2$ où O_1, O_2 ouvert vérifiant $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$
Alors $(A \cap O_1 = \emptyset$ et $A \subset O_2)$ ou $(A \cap O_2 = \emptyset$ et $A \subset O_1)$

ii) Si $A \subset F_1 \cup F_2$ où F_1, F_2 sont deux fermés de E vérifiant $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$
Alors $(A \cap F_1 = \emptyset$ et $A \subset F_2)$ ou $(A \cap F_2 = \emptyset$ et $A \subset F_1)$

<u>Exemple 4</u>: $\mathbb{Q}$ n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$ car si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$\mathbb{Q} \subset]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

<u>Théorème 5</u>: Soit $f : (E,d) \to (E',d')$ continue. Si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe.

<u>Proposition 6</u>: (E,d) connexe $\Leftrightarrow \forall f : E \to \{0,1\}$ continue, f est constante.

<u>Exemple 7</u>: $f : \mathbb{R}^* \to \{0,1\}$, $x \mapsto \dfrac{1 + \frac{x}{|x|}}{2}$ n'est pas constante donc $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe.

2) Connexité sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorème 8</u>: Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

<u>Théorème 9</u>: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

<u>Théorème 10</u>: Supposons (E,d) métrique compact et $(U_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $d(U_{n+1}, U_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérences est connexe.

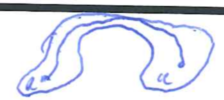
<u>Application 11</u>: Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et (U_n) une suite de $[0,1]$ telle que $f(U_n) = U_{n+1}$. Alors:
(U_n) converge $\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

II/ Connexité par arcs

1) Généralités

<u>Définition 12</u>: On appelle chemin de E toute application $\gamma : [0,1] \to E$ continue. L'image $\gamma([0,1])$ s'appelle arc, $\gamma(0)$ l'origine et $\gamma(1)$ son extrémité.

<u>Définition 13</u>: Soit (E,d) un espace métrique. On dit que E est connexe par arcs si $\forall (a,b) \in E^2$, il existe un arc tendu dans E



bcp trop dur
$E = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in]0,1]\}$
$X = \bar{E} = E \cup [-i, i]$
$(\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C})$
Connexe pas connexe par arcs

Théorème 14 : Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe.

Contre-exemple 15 : $\left[(\mathbb{Q} \cap [0,1[) \times [0,1]\right] \cup \{1,1\}$ est connexe ~~par~~ mais pas connexe par arcs.

Remarque 16 : La connexité par arcs est pratique pour montrer la connexité.

E un $\mathbb{R}$-ev normé.

Définition ~~17~~ : Soit $(a,b) \in E$, on appelle segment d'extrémité a et b l'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in [0,1]\}$ on note $[a,b]$.

Définition 18 : On appelle ligne brisée de E joignant a et b tout ensemble de la forme $\bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$ où $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_i \in E$.

Définition 19 : Une partie A de E est dite connexe par lignes brisées si $\forall (a,b) \in A^2$, il existe une ligne brisée dans A joignant a et b.

Exemple 20 : E est connexe par ligne brisée (connexe par arc) car $\forall (a,b) \in E^2$, $[a,b] \subset E$.

Théorème 21 : Une partie Ω de E est connexe $\Leftrightarrow$ elle est connexe par ligne brisées.

Corollaire 22 : Tout ouvert de E connexe est connexe par arcs.

2) Composantes connexes

Soit (E,d) un métrique !

Définition 23 : On considère sur (E,d) la relation d'équivalence : $x \sim y \Leftrightarrow \exists C$ connexe de E tq $x \in C$ et $y \in C$.
Soit $x \in E$, l'ensemble $\bar{x}$ s'appelle composante connexe de E.

Proposition 24 : Les composantes connexes de E forment une partition de E.

Définition 25 : On définit $GL_n(\mathbb{R})^+ = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$
$GL_n(\mathbb{R})^- = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}$

Proposition 26 : $GL_n(\mathbb{R})^+$ et $GL_n(\mathbb{R}^-)$ sont les 2 composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.

Théorème 27 : $O_n(\mathbb{R})$ admet 2 composantes connexes.
$O^+ = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$
$O^- = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = -1\}$.

III/ Application à l'analyse complexe

1) Indice ~~et formule de Cauchy~~

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 28 : On appelle lacet, tout chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ vérifiant $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Définition 29 : Soit γ un lacet et $z \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$, on définit l'indice de z par rapport à γ, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{x-z} dx$

Proposition 30: $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$

Proposition 31: Soit γ un lacet dans $\mathbb{C}$. L'application $z \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$

2) Principe des zéros isolés.

Définition 32 : On définit $\mathcal{A}(U)$ l'ensemble des fonctions analytique sur l'ouvert $U \subset \mathbb{C}$.

Théorème 33: Principe des zéros isolés : Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(U)$ non nulle. L'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de U.

Corollaire 34: Si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors $\mathcal{A}(U)$ est intègre.

Gourdon Analyse
Queffelec Topo
Tauvel