203

Utilisation de la notion de compacité.

Soit (E,d) un espace métrique.

I/ Généralités

1) Bolzano - Weierstrass

Définition 1 : (E,d) est dit compact si de tout recouvrement de E par des ouverts de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit : si $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ ouvert $\forall i \in I$, il existe $J \subset I$ fini tel que $E = \bigcup_{i \in J} O_i$

Contre-exemple 2 : $\mathbb{R}$ n'est pas compact car on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-n, n[$

Exemple 3 : $[0,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Exemple 4 : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de (E,d), et l sa limite. Alors $\Gamma = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

Proposition 5 : Un espace métrique compact est borné.

Proposition 6 : (E,d) est compact si et seulement si de toute intersection vide de fermés de E, on peut en extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

Corollaire 7 : Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides dans E compact, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

Théorème 8 : (Bolzano - Weierstrass) (E,d) est compact si et seulement si, toute suite de points de E admet une sous suite convergente.

2) Propriétés générales des compacts.

Proposition 9 : * Si E est compact et si A est une partie fermée de E Alors A est compact

* Si A est une partie compacte de E, A est fermée et bornée.

Proposition 10 : Un espace compact est complet.

Remarque 11 : Tout segment $[a,b]$, $a<b$ de $\mathbb{R}$ est complet.

Proposition 12 : Si (E,d) est compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, admettant une unique valeur d'adhérence x. Alors $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

Proposition 13 : Soient $E_1, .., E_n$ des espaces métriques. $E = E_1 \times .. \times E_n$ est compact $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]$, E_i est compact.

Application 14 : Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.

Théorème 15 : (Connexité des valeurs d'adhérences) Soit (E,d) un compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $\lim d(u_{n+1}, u_n) = 0$ Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence est connexe.

3) Compacité et applications continues.

Proposition 16 : Soit (E,d) un métrique compact, (F,δ) métrique et une application continue $f : E \to F$. Alors $f(E)$ est compact.

Corollaire 17 : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue, (E,d) compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 18 : (Heine). Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques avec (E,d) compact et $f : E \to F$ continue. Alors f est uniformément continue.

Lemme 19 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$

Théorème 20 : (Weierstrass) Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.

Application 21 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$. Alors $f = 0$.

II / Utilisation de la compacité pour les fonctions

1) En dimension 1

Théorème 22 : (Rolle) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continue et dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Corollaire 23 : (Théorème des accroissements finis) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$. Alors $\exists c \in]a,b[$, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Contre-exemple 24 : $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$. $f(0) = f(2\pi)$ mais $\forall t \in [0,2\pi]$, $f'(t) = ie^{it} \neq 0$.

Théorème de Dini :

2) Dans un espace vectoriel normé

Théorème 25 : Dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 26 : Toutes applications linéaires d'un espace vectoriel normé de dimension finie dans un EVN est continue.

Contre-exemple 27 : $\mathbb{R}[X]$ munit de la norme $\|\sum_{i=1}^{n} a_i X^i\| = \sup_i |a_i|$. L'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ n'est pas continue.

Théorème 28 : (Riesz) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. La boule unité fermé est compact si et seulement si E est de dimension finie.

III / Applications

1) En algèbre linéaire

Proposition 29 : Le groupe orthogonal $O(n)$ est compact

Application 30 : (Décomposition polaire) L'application
$$O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), \quad (O,S) \mapsto OS$$
est un homéomorphisme

2) Compacité et holomorphie :

Définition 31 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur U. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers f sur U si, pour tout compact K de U, la suite $(f_n|K)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f|K$.

Remarque 32 : Si $\sum f_n$ est une serie de fonction sur U. On définit de même la convergence uniforme et normale sur tout compact.

Notation 33 : On note $\|f\|_K = \sup\{|f(z)|,\ z \in K\}$

Théorème 34 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n) \in \mathcal{H}(U)^{\mathbb{N}}$

Si (f_n) converge uniformément sur tout compact vers f. Alors on a

i) $f \in \mathcal{H}(U)$

ii) $\forall j \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(j)})_n$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(j)}$

Théorème 35 : Soient U ouvert de $\mathbb{C}$ et $\sum f_n$ une serie de fonctions holomorphes sur U.

Si $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact. Alors.

i) $\sum f_n \in \mathcal{H}(U)$

ii) $\sum f_n$ est normalement convergente sur tout compact !

Application 36 : Espace de Bergmen : $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert et $\{e_n : z \mapsto z^n \sqrt{\frac{n+2}{\pi}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ en est une base hilbertienne.

Gourdon

Queffelec Tapo

Tauvel.