201 — Espaces de fonctions, exemples et applications

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (X,d) (Y,δ) métriques $f : X \to Y$.

I/ Des espaces de fonctions continues

1) Continuité, uniforme continuité. [1]

Définition 1 : On dit que f est continue si $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in Y$ $d(x,y) \leq \delta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. On note $\mathcal{C}(X,Y)$ leur ensemble

Exemple 2 : Les applications constantes sont continues

Proposition 3 : Si Y est un espace vectoriel, alors $\mathcal{C}(X,Y)$ l'est aussi.

Théorème 4 : f est continue en $x \in X \Leftrightarrow$ Pour toute suite $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Définition 5 : On dit que f est uniformément continue si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in X$ $d(x,y) \leq \delta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$

Exemple 6 : Les fonctions lipschitziennes sont uniforméments continues.

Remarque 7 : Une application uniformément continue est continue mais la réciproque est fausse en générale $(x \mapsto x^2)$

2) Espaces normés des fonctions continues sur un compact.

Théorème 8 : (Heine) Si X est compact et f continue. Alors f est uniformément continue

Théorème 9 : Si X est compact et f continue, Alors $f(X)$ est compact.

Corollaire 10 : Si X est compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Application 11 : Dans les espaces vectoriels de dimension finie les normes sont équivalentes.

Corollaire 12 : La distance $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X}(\delta(f(x), g(x)))$ est bien définie sur $\mathcal{C}(X,Y)$ [1]

Proposition 13 : Cette métrique caractérise la convergence uniforme des suites de fonctions, de plus la limite uniforme d'une suite de fonction continue est continue.

Remarque 14 : La convergence simple ne suffit pas ; $\begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n\end{array}$ converge simplement vers δ_1 qui n'est pas continue.

Théorème 15 : Si Y est complet, alors $(\mathcal{C}(X,Y), d_\infty)$ est complet.

3) Partie Dense.

Définition 16 : Soit K compact et A sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ On dit que A sépare les points si $\forall (x,y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$

Théorème 17 : Stone Weierstrass (admis) Soit K compact et A sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ telle que A contienne les constantes et sépare les points. Alors A est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ pour la norme uniforme. [2]

Théorème 18 : Weierstrass : Toute fonction de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite de fonction polynomiale

D1

Application 19 : Si $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \int_0^1 f(t)\, t^n\, dt = 0$ Alors $f = 0$

[3]

II/ Les espaces de Lebesgue.

1) Des espaces vectoriels

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 20 : Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$

Remarque 21 : L'application $\|.\|_p$ définie une semi-norme.

Proposition 22 : Si $\mu(X) < \infty$ alors $p \leq q \Rightarrow \mathcal{L}^q(X) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$

Proposition 23 : Inégalité de Young : Si $\alpha \in]0,1[$ et $(u,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ alors $u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha) v$ avec égalité si $u = v$

Théorème 24 : Hölder Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $(p,q) \in [1, +\infty[^2$ et $(f,g) \in \mathcal{L}^p(\mu) \times \mathcal{L}^q(\mu)$ alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Corollaire 25 : Minkowski Si $p \geq 1$, $(f,g) \in \mathcal{L}^p(\mu)^2$

Alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Définition 26 : $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ où $f \sim g$ si $\|f-g\|_p = 0$.

Théorème 27 : Fischer-Riesz : $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé et complet.

2) Application au cas hilbertien

Definition 28 : $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g}(x) dx$ définit un produit scalaire et donne à $L^2(K)$ une structure hilbertienne.

Definition 29 : Une fonction poids sur $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction mesurable $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\int_I |x|^n \rho(x) dx < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Remarque 30 : Par Graam-Schmidt, il existe une famille orthonormale de polynômes unitaire échelonnés en degrés appelé les polynômes orthogonaux.

Théorème 31 : Soit $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction poids et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$. Alors la famille des polynomes orthogonaux est une base hilbertienne de $L^2(I)$

Exemple 32 : $\rho(x) = e^{-x^2}$ les polynômes obtenus sont les polynômes d'Hermites où $P_n = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

III/ Espaces des fonctions holomorphes.

1) Holomorphie et intégration

Definition 33 : f est holomorphe sur Ω si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω. On note $H(\Omega)$ leur ensemble.

Théorème 34 : Cauchy-Riemann. On a l'équivalence

$$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \text{où } u = \mathrm{Re}(f),\ v = \mathrm{Im}(f).$$

[5]

[5]

Définition 35 : Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin alors $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$.

Exemple 36 : $\int_{C(0,r)} \frac{1}{z}\,dz = 2i\pi$

Théorème 37 : Cauchy. Soit U ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $w \in U$ et f continue sur U et $f \in H(U \setminus \{w\})$. Alors f possède une primitive dans U et pour tout chemin fermé γ dans U, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Théorème 38 : Morera : Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et f continue sur U.
$f \in H(U) \Leftrightarrow \forall \Delta \subset U \int_{\partial U} f(z)\,dz = 0$.

2) Espace des fonctions holomorphes

Théorème 39 : Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H(U)$ convergeant uniformément vers f sur tout compact. Alors $f \in H(U)$.

Application 40 : L'espace de Bergman $H := L^2(D) \cap H(D)$ est un espace hilbertien et $\{z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H.

D2

[5]

Lemme 41 : Schwarz : Soit $f \in H(\mathbb{D})$ vérifiant $f(0)=0$ et $|f(z)|<1$ $\forall z \in \mathbb{D}$. On a alors :
i) $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$ ii) $|f'(0)| \leq 1$, et si $|f'(0)|=1$ ou si $\exists z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ tel que $|f(z)|=|z|$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda|=1$ et $f(z)=\lambda z$ $\forall z \in \mathbb{D}$.

Application 42 : $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \;\middle|\; |\lambda|=1,\ a \in \mathbb{D} \right\}$

[1] Topo générale et espace normés Nawfal Hassan
[2] Cours d'analyse fonctionnelle Daniel Li.
[3] Théorie de l'intégration Briane et Pagès.
[4]
[5] Tauvel.