162

Systèmes d'équations linéaires; opérations élémentaires, aspect algorithmique et conséquences théoriques.

I/ Généralités sur les systèmes linéaires.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1) Définitions et interprétations

Définition 1 : On appelle système linéaire de p équations en n inconnues un système de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_n \end{cases}$$

où les a_{ij} et b_{ij} appartiennent à un corps $\mathbb{K}$.

Définition 2 : On appelle solution de (S), tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ dont les composantes x_i satisfont toutes les équations.

Définition 3 : On dit que le système est compatible si il admet au moins une solution.

Exemple 4 : Le système $(1) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$ est compatible et le vecteur $x = (-3, 2)$ est solution de ce système.

Proposition 5 : Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & & a_{pp} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système (S) peut alors s'écrire sous la forme $AX = B$.

Définition 6 : On appelle rang du système, le rang de la matrice A.

Exemple 7 : Le système (1) peut s'écrire : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Remarque 8 : En notant $c_1, \dots, c_n$ les vecteurs colonnes de la matrice A, le système (S) peut s'écrire $x_1c_1 + \dots + x_nc_n = b$

Proposition 9 : Le système (S) est compatible si et seulement si $b \in \mathrm{Vect}(c_1, \dots, c_n)$

2) Système de Cramer

Définition 10 : On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice A est carrée et inversible.

Proposition 11 : Un système de Cramer admet une unique solution de la forme $X = A^{-1}B$.

Théorème 12 : Un système de Cramer $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ admet toujours une unique solution, quel que soit $b = (b_1, \dots, b_n)$, solution donnée par les formules de Cramer $x_i = \dfrac{\det(c_1, \dots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \dots, c_n)}{\det(A)}$

Exemple 13 : Le système $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases}$ se résout par la méthode de Cramer et donne $(5, 1, 1)$.

Guifone

II/ Méthode du pivot de Gauss :

1) Etude d'un système d'équations linéaires par la méthode du pivot.

Proposition 14 : L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si l'on effectue des opérations élémentaires sur les équations, qui sont :

i) Changer l'ordre des équations.

ii) Multiplier une équation par un scalaire non nul.

iii) Ajouter à une équation une combinaison des autres équations.

Définition 15 : Une matrice est dite échelonnée si les lignes commencent par un nombre de zéros strictement croissant à mesure que l'indice augmente.

Exemple 16 : - La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est pas échelonnée.

Proposition 17 : Toute matrice peut s'écrire sous ~~une~~ forme échelonnée par une succession d'opération élémentaire

Définition 18 : Un système linéaire $AX=B$ est dit homogène si il est de la forme $AX=0$.

Théorème 19 : L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Si le système sous forme échelonnée comporte k équations, l'espace des solutions est de dimension $n-k$.

Exemple 20 : Pour le système $\begin{cases} x+2y-3z+t-w=0 \\ x+3y-4z+w=0 \\ 2x+5y-7z+t=0 \end{cases}$ l'espace des solutions est de dimension 3 et a pour base $\{(1,1,1,0,0),(-3,1,0,1,0),(5,-2,0,0,1)\}$

2) Application à la méthode LU :

Théorème 21 : Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que les n mineurs de A soit inversible. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L=(l_{i,j})$ avec $l_{i,i}=1$ et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A=LU$. Cette factorisation est unique

Exemple 22 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{33}{2} \end{pmatrix}$

Application 23 : Soit un système $AX=B$ avec $A=LU$. Il suffit de résoudre les 2 systèmes échelonnés i) $LY=B$ et ii) $UX=Y$

Proposition 24 : - Le nombre d'opération pour factoriser une matrice A sous la forme LU est $N_{op}\simeq\frac{n^3}{3}$

- La résolution d'un système $LUX=B$ a un coût de $\simeq n^2$ opérations.

Allaire Algèbre lin num

Proposition : La complexité de l'algorithme du pivot de Gauss est un $O(n^3)$

Ciarlet

D1

III / Aspect algorithmique :

1) Méthode QR :

Théorème 25 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice $Q \in U_n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = QR$.
De plus, cette décomposition est unique et $R_{i,i} > 0$.

Exemple 26 :
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Définition 27 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On définit la suite $(A_k)_{k \geq 1}$ de la manière suivante :

$A = A_1 = Q_1 R_1$

$A_2 := R_1 Q_1 = Q_2 R_2$ la décomposition QR de A_2

$\vdots$

$A_k = R_{k-1} Q_{k-1} = Q_k R_k$ la décomposition QR de A_k.

Théorème 28 : Méthode QR : On suppose que la matrice A est inversible et que ses valeurs propres sont toutes de modules différents. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$ et l'on suppose que P^{-1} admet une décomposition LU.
Alors la suite $(A_k)_{k \geq 1}$ est telle que :

i) $(A_k)_{i,i} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \lambda_i$

ii) $(A_k)_{i,j} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ $\quad 1 \leq i < j \leq n$.

2) Gradient à pas optimal :

Définition 29 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On définit le produit scalaire associé à A, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ par : $\langle x, y \rangle_A = {}^t x A y = \langle x, Ay \rangle$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 30 : Résoudre le système linéaire $Ax = b$ revient à minimiser la fonction $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|_A^2 - {}^t x b$

Théorème 31 : Gradient à pas optimal :

1) L'application ϕ atteint son minimum en $\bar{x}$ (l'unique solution de $Ax = b$) et seulement en ce point.

2) Soit $a \in \mathbb{R}^n$ distinct de $\bar{x}$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}^n$ définie par :
$$\begin{cases} x_0 = a \\ \alpha_k = \dfrac{\|\nabla \phi(x_k)\|^2}{\|\nabla \phi(x_k)\|_A^2} \text{ si } x_k \neq \bar{x}, \; \alpha_k = 0 \text{ sinon} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla \phi(x_k) \end{cases}$$

La suite $(x_k)_{k \geq 0}$ converge vers $\bar{x}$. De plus, $\forall k \geq 0$.
$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \left(\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \right)^{k+1} \|x_0 - \bar{x}\|$$

Lemme 32 : Kantorovitch : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
$$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_{A^{-1}}^2 \|x\|_A^2} \geq 4 \frac{\lambda_{max} \lambda_{min}}{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2}$$

Bernis

D2