158 — Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I/ Matrices symétriques réelles et hermitiennes.

1) Généralités

Définition 1 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que A est symétrique si ${}^tA = A$ et antisymétrique si ${}^tA = -A$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que A est hermitienne si ${}^t\bar{A} = A$

Remarque 2 : On note $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétrique et antisymétrique et $H_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermiciennes.

Proposition 3 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $H_n(\mathbb{C})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 4 : $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$

Exemple 5 : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{R})$

et $\begin{pmatrix} 1 & -i & 3+2i \\ i & 5 & 1+i \\ 3-2i & 1-i & -4 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{C})$

Corollaire 6 : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

Remarque 7 : $S_n(\mathbb{R}) \subset H_n(\mathbb{C})$ et les coefficients diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels.

2) Formes bilinéaires symétriques et hermitiennes.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Définition 8 : Soit $b : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire et B une base de E. La matrice de b dans B est donnée par $Mat_B(b) = (b(e_i, e_j))_{1 \le i,j \le n}$

Proposition 9 : Soit $(x,y) \in E^2$, on note $X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
On a alors $b(x,y) = {}^t\bar{X}\, Mat_B(b)\, Y$

Exemple 10 : Soit $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto 2y_1x_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$
est une forme bilinéaire dont la matrice est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Définition 11 : Soit $b : E \times E \to \mathbb{K}$. b est dite symétrique si $\forall (x,y) \in E \times E$, $b(x,y) = b(y,x)$ et hermitienne si $\forall (x,y) \in E \times E$, $b(x,y) = \overline{b(y,x)}$

Proposition 12 : b est symétrique $\Leftrightarrow Mat_B(b) \in S_n(\mathbb{R})$
b est hermitienne $\Leftrightarrow Mat_B(b) \in H_n(\mathbb{C})$

3) Adjoint

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien.

Lemme 13 : Pour toute forme linéaire l sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $l(x) = \langle x, a \rangle$, $\forall x \in E$.

Théorème 14 : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$. $\forall (x,y) \in E^2$.

Définition 15 : L'endomorphisme u^* est appelé adjoint de u.

Théorème 16 : Soit $B = (e_i)_{1 \le i \le n}$ une base de E et $G = (\langle e_i, e_j \rangle)$
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $A = Mat_B(u)$ alors $Mat_B(u^*) = G^{-1}\,{}^tA\,G$
Dans le cas où B est orthonormée, on a $Mat_B(u^*) = {}^tMat_B(u)$

Théorème : (orthogonalisation simultanée) Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien et q une forme quadratique sur E. Alors il existe des bases qui sont orthogonales pour $\langle .,. \rangle$ et pour q.

II / Réduction des matrices symétriques et Hermitiennes

1) Endomorphismes symétriques

<u>Définition 17</u> : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique si $u^* = u$.

<u>Proposition 18</u> : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

<u>Proposition 19</u> : Les valeurs propres d'une matrice symétriques réelles A sont toutes réelles.

<u>Lemme 20</u> : On suppose que $n \geq 2$. Si λ_1 est une valeur propre de $u \in \mathcal{S}(E)$, $e_1 \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé de norme 1. Alors l'hyperplan $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u et $u_{|H}$ est symétrique.

<u>Théorème 21 (Spectral)</u> Tout endomorphisme symétrique u se diagonalise dans une base orthonormée.

<u>Corollaire 22</u> : $\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, ${}^tPMP$ soit diagonale

2) Applications du théorème spectral

E euclidien.

<u>Définition 23</u> : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un endomorphisme normal si $u^*u = uu^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale si $M\overline{M}^t = \overline{M}^tM$.

<u>Lemme 24</u> : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable de E par u. Alors $F^\perp$ est stable par u^*

<u>Lemme 25</u> : Soit u normal. Alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

<u>Lemme 26</u> : Soit E euclidien de dim 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal sans vp réelle. Alors $\forall$ Base B orthonormée, $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

<u>Théorème 27</u> : (Réduction des endomorphismes normaux). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. $\exists B$ base orthonormée tq $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \tau_1 & \\ 0 & & & & \ddots \;\tau_p \end{pmatrix}$

<u>Théorème 28</u> : (Décomposition polaire). $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \longmapsto OS$. est un homéomorphisme

<u>Application 29</u> : $GL_n(\mathbb{R})$ à 2 composantes connexe.

<u>Théorème 30</u> : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéo
$\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

<u>Théorème 31</u> : $O(p, q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ est un homéo

III / Applications

<u>Théorème 32</u> : (Factorisation LU). Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ d'ordre dont toutes les sous-matrices diagonales d'ordre k soient inversibles. Alors $\exists! (L, U)$ triangulaire sup et inf tq $A = LU$ et $l_{i,i} = 1$.

<u>Exemple 33</u> : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

<u>Théorème 34</u> : (Cholesky). Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. $\exists! B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangle inf tq $b_{i,i} \geq 0$ et $A = B{}^tB$

Exemple 35 : $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&13&2&4\\1&2&2&3\\2&4&3&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&3&0&0\\1&0&1&0\\2&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&3&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

Gradient :

- Griffone
- Rombaldi
- NM2G2
- Algèbre linéaire numérique Allaire/Kaber.